ÁLGEBRA I

mesalva.com

MÓDULOS CONTEMPLADOS

- ✓ EQPG - Introdução à Álgebra e Equações de 1º Grau
- ✓ INEI - Introdução a inequações
- ✓ TRPM - Transformando português em matematiquês

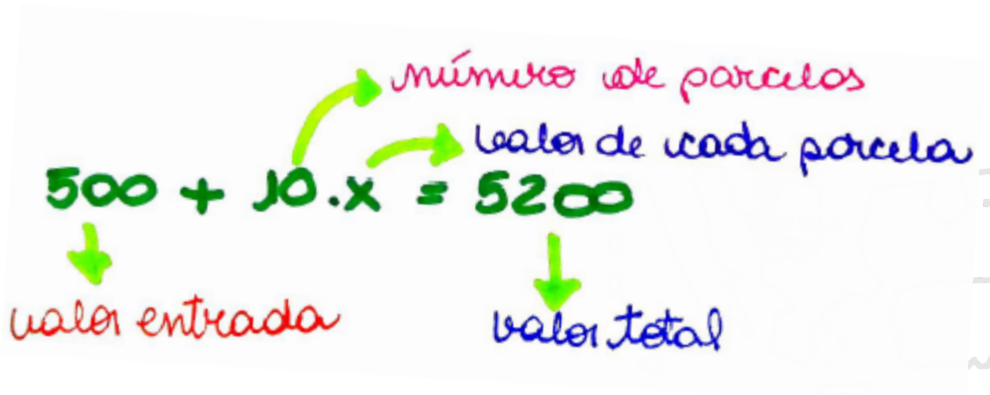
CURSO	EXTENSIVO 2017
DISCIPLINA	MATEMÁTICA
CAPÍTULO	ÁLGEBRA I
PROFESSORES	ARTHUR LOVATO, TAMARA SALVATORI

ÁLGEBRA I

Em geral a palavra Álgebra causa um arrepio nas pessoas, mas prometemos que isso não acontecerá com você! Essa área do conhecimento consiste basicamente na utilização de símbolos (em geral são utilizadas letras) nas expressões numéricas que você está acostumado a resolver. Ao longo do nosso estudo de Álgebra você verá que utilizando esses símbolos é possível expressar problemas mais complexos e que são necessários para o desenvolvimento da humanidade. Essa área foi dividida em duas apostilas e nessa você será introduzido a esse mundo maravilhoso da resolução problemas utilizando manipulações matemáticas.

EQUAÇÕES DE 1º GRAU

Você recebeu um e-mail com o anúncio do computador dos seus sonhos, porém sua situação financeira não está muito boa. O valor dele à vista é R$ 4.500,00, mas a loja permite que você faça a compra parcelada em 10 vezes fixas, com uma entrada de R$ 500,00 totalizando R$ 5.200,00. Esse tipo de anúncio é bastante comum e às vezes não contém o valor das parcelas, mas o cálculo é bastante simples e você sabe como resolvê-lo rapidamente. Basta fazer a subtração entre 5.200 e 500, que resultará em 4.700 e dividir esse valor por 10, que é o número de parcelas. Isso significa que cada parcela será de R$ 470,00. Esse foi um cálculo tão simples que às vezes nem percebemos quanta matemática está envolvida, mas utilizamos conceitos muito importantes nessa resolução. Veja como esse problema pode ser reescrito:



Com o auxílio da matemática, “traduzimos” o que estava escrito no anúncio para uma linguagem simplificada e bastante visual. Para isso foi necessário utilizar operações matemáticas (nesse caso, adição e multiplicação), igualdade e uma letra, descrevendo o que chamamos de equação algébrica. Essa letra – no nosso caso o x, mas poderia ser qualquer outra – é chamada de variável ou de incógnita.

Então, a álgebra é caracterizada pela coexistência de letras e números em uma conta chamada de "equação", devido à presença do sinal de igual. Perceba que o expoente da variável x é 1 (foi omitido por conveniência, como estudamos anteriormente) e, por isso, essa equação é denominada Equação de 1º Grau, isto é, a variável dessa equação tem grau 1. Isso significa que há apenas uma solução para essa equação. A resolução envolve basicamente o isolamento da variável. Lembre que, para cancelar uma operação de um lado, basta realizar a sua inversa dos dois lados da equação. Veja um exemplo:

$$500 + 10x = 5200$$

$$-500 + 500 + 10x = 5200 - 500$$

$$10x = 5200 - 500$$

$$10x = 4700$$

$$\frac{10x}{10} = \frac{4700}{10}$$

$$x = \frac{4700}{10}$$

$$x = 470$$

Claro que se você já está familiarizado com a resolução de equações, não há necessidade de fazer todos esses passos, pois é bastante provável que você lembre da frase "passa para o outro lado com o sinal trocado" ou "se está dividindo, passa para o outro lado multiplicando", entre outras, mas o cerne dessas frases é que toda a operação feita de um lado da equação deve ser feita do outro lado também para que a equivalência não seja desfeita.

O valor encontrado para x é chamado de solução ou raiz e é, no nosso exemplo, exatamente o valor das parcelas do computador. Para termos certeza de que esse valor é a solução (ou raiz) dessa equação de 1° grau, devemos substituir o valor encontrado na equação e analisar se o resultado faz sentido. Acompanhe:

$$500 + 10x = 5200$$

$$500 + 10(470) = 5200$$

$$500 + 4700 = 5200$$

$$5200 = 5200$$

Como essa igualdade é verdade, sabemos que 470 é realmente a raiz dessa equação. É comum que a raiz seja chamada de zero da equação, pois, se a equação está igualada a zero, o seu objetivo será encontrar um valor que a zere.

Formalizando as Equações de 1º Grau, teremos a equação geral na forma de:

$$ax + b = 0$$

Em que a sempre será diferente de zero e x é a variável que procuramos. Podemos reescrever o problema anterior apenas reorganizando seus termos. Veja:

$$500 + 10x = 5200$$
$$500 - 5200 + 10x = 0$$
$$-4700 + 10x = 0$$
$$\mathbf{10x - 4700 = 0}$$

Comparando essa equação à equação geral, teremos que a = 10 e b = -4700. Isso pode parecer irrelevante agora, mas logo você perceberá a importância disso, ok?

EQUAÇÕES DE 1° GRAU COM DUAS OU MAIS VARIÁVEIS

Vamos complicar um pouco a situação. Você, sempre ligado nas promoções, recebeu outro e-mail com ofertas. Dessa vez a barbada é: compre 3 calças e 5 blusas por apenas R$ 450,00. Você resolveu fazer as contas para saber quanto, mais ou menos, seria o preço de cada tipo de peça para ver se valia a pena aproveitar. Como você já está bem familiarizado com a álgebra, resolveu construir uma equação para resolver esse problema, mas percebeu que dessa vez há dois itens diferentes envolvidos. E agora? Antes aprendemos que podemos substituir algo que não sabemos por uma letra, que chamamos de variável. Agora, há duas coisas que não sabemos, será que podemos realizar o mesmo procedimento? Claro! Podemos adicionar quantas variáveis forem necessárias para resolver o problema. O que vai mudar um pouco é a forma de resolução. Vamos montar o anúncio de forma algébrica:

$$3x + 5y = 450$$

Em que o x será o valor de cada calça e o y será o valor de cada blusa. Mas e agora, como resolver essa equação? Perceba que é inútil apenas isolar uma das variáveis, porque não há como resolver a equação apenas dessa forma. Antes isso funcionava porque tínhamos apenas uma solução para a equação, agora teremos o que chamamos de pares ordenados. O que é isso? Vamos arbitrar que o preço de uma calça deve ser R$ 80,00 e vamos substituir esse valor na equação:

$$3x + 5y = 450$$
$$3(80) + 5y = 450$$
$$240 + 5y = 450$$

Agora temos novamente apenas uma variável. Portanto, podemos aplicar o mesmo procedimento de antes, isolando o y:

$$240 + 5y = 450$$
$$5y = 450 - 240$$
$$5y = 210$$
$$y = 42$$

Então, se o valor da calça for R$ 80,00, o da blusa deve ser R$ 42,00. Perceba a dependência que um valor tem do outro, se x = 80, então y = 42. Isso é um par ordenado! São dois valores que transformam a equação verdadeira, ou seja, uma das soluções para essa equação! E se o preço de cada calça fosse R$ 90,00?

$$3x + 5y = 450$$
$$3(90) + 5y = 450$$
$$270 + 5y = 450$$
$$5y = 450 - 270$$
$$5y = 180$$
$$y = \frac{180}{5}$$
$$y = 36$$

O preço de cada blusa seria R$ 36,00. Então o par ordenado agora seria x = 90 e y = 36 e essa seria outra solução para a equação. Formalizando essas respostas, teremos (80, 42) e (90, 36). Note que os pares ordenados podem ter infinitas variações e dependem das equações envolvidas.

Para finalizar, vamos ver a equação geral de equações de 1° grau com duas variáveis:

$$ax + by = c$$

Em que a e b devem ser diferentes de zero.

No caso do nosso problema, teríamos a = 3, a quantidade de calças, e b = 5, a quantidade de blusas.

(VUNESP – 2011) Pedrinho tinha quatro anos quando sua mãe deu à luz a gêmeos. Hoje, a soma das idades dos três irmãos é 52 anos. A idade de Pedrinho hoje é:

a) 16 anos

b) 17 anos

c) 18 anos

d) 19 anos

e) 20 anos

Alternativa correta: E

Módulo: EQPG – Equações de Primeiro Grau

Lista: EQPGEX – Exercícios de Fixação #6

(PMPP – 2012) – Dona Yara comprou 4 pares de sapatos e gastou R$ 725,00 ao todo. O 2.º par de sapatos custava R$ 20,00 a mais do que o 1.º, o 3.º custava o dobro do 2.º, e o 4.º custava o triplo do 1.º. O preço do 4.º par de sapatos foi:

a) R$285,00

b) R$265,00

c) R$245,00

d) R$ 230,00

e) R$205,00

Alternativa correta: A

Módulo: EQPG – Equações de Primeiro Grau

Lista: EQPGEX – Exercícios de Fixação #9

(UBAU – 2012) – Um animador de festas pediu a atenção dos participantes e proclamou: – Pensei em um número. Multipliquei esse número por 5 e depois subtraí 65 do produto. O valor obtido é o mesmo que somar 81 ao triplo do número que eu tinha pensado no início. O número que eu pensei é um número que está entre:

a) 21 e 30

b) 40 e 63

c) 70 e 85

d) 88 e 90

e) 100 e 112

Alternativa correta: C

Módulo: EQPG – Equações de Primeiro Grau

Lista: EQPGEX – Exercícios de Fixação #2

INEQUAÇÕES DE 1° GRAU

Estudantes que prestarão a prova do ENEM deverão responder, no primeiro dia da prova, 90 questões no tempo mínimo de 2 horas e de no máximo 4 horas e 30 minutos. Os professores do Me Salva! procuram chamar bastante atenção para um ponto muito importante, o treino da prova, ou seja, os simulados. Participar desses simulados é fundamental para que o estudante chegue na prova familiarizado com as características das questões e assim possa realizar a prova com mais tranquilidade. Outro quesito em que os simulados ajudam bastante é o treino no tempo de resolução de cada questão. São 90 questões para fazer em no máximo quatro horas e meia. Isso significa que é pouco ou muito tempo? Para respondermos essa pergunta vamos começar a utilizar sinais que, a partir de agora, serão chamados de sinais de desigualdade (maior ou igual, menor ou igual, maior, menor ou diferente).

Você consegue perceber que podemos montar uma "equação" relacionando o número de questões com o tempo da prova e o tempo de resolução de cada uma delas? É bastante semelhante ao que fizemos na seção anterior, mas agora no lugar do sinal de igual teremos uma desigualdade e, por isso, não vamos mais chamá-la de equação, mas de inequação. Fique tranquilo, o procedimento é bastante parecido. Vamos montar a inequação do tempo mínimo de prova, que é de 2 horas:

tempo de cada questão

maior ou igual

$$90t \geq 2 \text{ horas}$$

número de questões

tempo mínimo de prova

Perceba que o número de questões multiplicado pelo tempo de resolução de cada uma delas deve ser maior ou igual a 2 horas. Antes de iniciarmos a resolução vamos modificar a unidade de tempo. Temos o tempo em horas, mas fica difícil visualizar o tempo para cada questão se utilizarmos horas, certo? Então vamos transformar as horas em segundos. Mais adiante você vai aprender a fazer a regra de três; por enquanto, peço que você confie e apenas multiplique o número de horas por 3.600 (uma hora tem 3.600 segundos), e assim teremos o valor em segundos. Nesse caso, teremos:

$$2 \times 3600 = 7200 \text{ segundos}$$

Vamos substituir esse valor na inequação anterior e resolvê-la:

$$90t \geq 7200 \text{ segundos}$$

$$t \geq \frac{7200}{90}$$

$$t \geq 80 \text{ segundos}$$

Então, considerando que todas as questões são realizadas exatamente no mesmo tempo, o tempo para resolução de cada questão é de mais de 80 segundos, ou seja, 1 minuto e 20 segundos. Outra forma de entender esse resultado é que 80 segundos é o tempo mínimo para resolver cada questão. Mas e o tempo máximo que se tem para resolver cada uma delas? Lembre que o tempo máximo da prova é de 4 horas e meia, ou seja, não pode ultrapassar esse valor. Portanto, o número de questões multiplicado pelo tempo de resolução de cada uma delas deve ser menor ou igual ao tempo máximo de prova. Veja como esse problema pode ser montado:

tempo de cada questão

menor ou igual

$$90t \leq 4{,}5 \text{ horas}$$

número de questões

tempo máximo de prova

Agora vamos transformar o tempo em horas para segundos:

$$4{,}5 \times 3600 = 16200 \text{ segundos}$$

Ótimo! Podemos substituir esse valor na inequação acima e resolvê-la:

$$90t \leq 16200 \text{ segundos}$$

$$t \leq \frac{16200}{90}$$

$$t \leq 180 \text{ segundos}$$

A partir dessa resolução, temos que o tempo máximo para resolver cada questão deve ser de 180 segundos, ou 3 minutos.

Para finalizar, podemos simplificar o resultado das duas inequações que acabamos de resolver: o tempo mínimo de resolução é 80 segundos e o máximo é 180 segundos, ou seja, o tempo deve estar entre esses dois valores, certo? Lembrando sempre que estamos considerando que as questões são resolvidas no mesmo tempo. Isso pode ser “traduzido” matematicamente como:

$$80 \leq t \leq 180$$

Você pode ler de várias formas, uma delas é o que já foi dito, que o tempo de resolução deve estar entre 80 e 180 segundos, mas isso não é tão preciso, já que temos os sinais de igualdade inclusos. Então, você pode ler, do meio para a esquerda, que o tempo deve ser maior ou igual a 80 e, do meio para a direita, o tempo de resolução deve ser menor ou igual a 180. Apesar de essa resposta estar correta, a forma usual de expressá-la é utilizando conceitos de conjuntos. Nesse caso podemos utilizar todo o conjunto dos Reais, mas isso nem sempre acontece (apesar de ser usual). Por exemplo: se tivéssemos apenas a informação de que *t* deve ser menor do que 80, você precisaria sinalizar que isso não inclui números negativos, afinal não há tempo negativo. No caso que estamos estudando, a região está bem delimitada, pois o tempo deve estar entre 80 e 180 segundos e pode assumir valores diversos nesse intervalo, por isso é possível utilizar o conjunto dos Reais. Resumindo, você sempre precisará analisar o problema. Veja como expressar a resposta da forma correta:

$$S = \{t \in \Re \mid 80 \leq t \leq 180\}$$

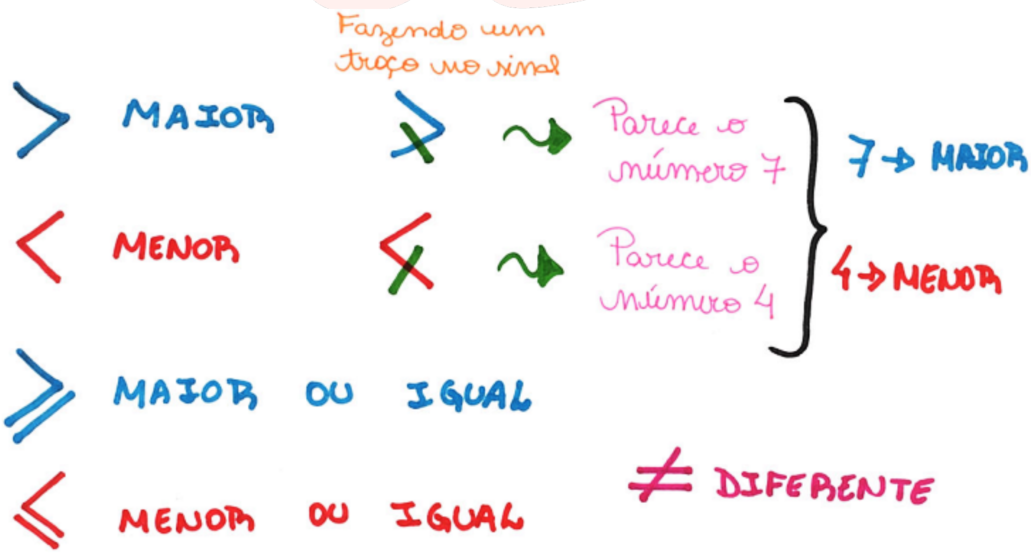
Lê-se "*t* pertence aos Reais tal que t é maior ou igual a 80 e *t* é menor ou igual a 180". Preste atenção para utilizar a variável correta (na maioria das vezes temos o x no lugar do t) e o conjunto ao qual pertence a solução (S).

Também é possível expressar matematicamente o tempo da prova:

$$2 \text{ horas} \leq T \leq 4{,}5 \text{ horas}$$

E a forma de ler é a mesma: do meio para a esquerda, "o tempo de prova (T) deve ser maior ou igual a 2 horas"; do meio para a direita, "o tempo de prova (T) deve ser menor ou igual a 4,5 horas".

Foi simples resolver esse probleminha, certo? Vamos deixar um lembrete de "nomes" dos sinais e como saber qual é o sinal de maior e qual é o sinal de menor. Depois desse esquema você nunca mais vai fazer confusão! Veja:



Outra forma de memorizar isso tudo é imaginando o sinal como se ele fosse a boca de um jacaré. Como esse jacaré é guloso, ele sempre come o número maior. Então, veja que no caso de 5 > 3 a boca do jacaré está tentando abocanhar o 5, que é o número maior. No caso $1 < 2$, ela está tentando abocanhar o número 2. Legal, né?

Assim como as equações, as inequações também têm sua forma geral, que é bastante semelhante ao que já estudamos:

$$ax + b \geq 0$$

Em que a deve ser diferente de zero e o sinal de maior ou igual pode ser substituído por menor ou igual, menor, maior ou diferente. Como estamos tratando de inequações de primeiro grau, o expoente da variável – x, nesse caso – sempre será 1.

A resolução de inequações apresenta algumas particularidades, apesar de seguir os mesmos preceitos da resolução de equações. Vamos estudá-las a partir de agora:

PRINCÍPIO ADITIVO

Apesar de ser chamado de aditivo, esse princípio também envolve subtração. Vamos tomar como exemplo a desigualdade $10 > 8$ (10 maior do que 8). Essa é uma desigualdade verdadeira. Agora vejamos o que acontece se adicionarmos ou subtrairmos valores de ambos os lados da expressão.

ADICIONANDO UM NÚMERO:

$$10 > 8$$
$$10 + 2 > 8 + 2$$
$$8 > 6$$

Como 12 é maior do que 10, a desigualdade foi mantida e o sinal continua o mesmo!

SUBTRAINDO UM NÚMERO:

$$10 > 8$$
$$10 - 2 > 8 - 2$$
$$8 > 6$$

Novamente a desigualdade se manteve, já que 8 é maior do que 6. Note que quando adicionamos ou subtraímos um número a desigualdade se mantém.

PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Assim como no princípio anterior, esse, apesar de ser chamado de multiplicativo, envolve também a divisão. Vamos ver o que acontece com a desigualdade 10 > 8 nos casos abaixo.

MULTIPLICANDO POR UM NÚMERO POSITIVO

Multiplicaremos ambos os lados por 2.

$$10 > 8$$
$$10(2) > 8(2)$$
$$20 > 16$$

A desigualdade continua sendo verdadeira.

DIVIDINDO POR NÚMERO POSITIVO

Descobriremos o que acontece se dividirmos os dois lados por 2.

$$10 > 8$$
$$\frac{10}{2} > \frac{8}{2}$$
$$5 > 4$$

A desigualdade também é mantida!

MULTIPLICANDO POR NÚMERO NEGATIVO

Vamos realizar os mesmos procedimentos e analisar o que acontece com a desigualdade se a multiplicamos por um número negativo – no caso, -2.

$$10 > 8$$
$$10(-2) > 8(-2)$$
$$-20 < -16$$

Que interessante! A desigualdade é INVERTIDA! Como assim? Para manter a coerência, tivemos que inverter o sinal, já que -20 é menor do que -16.

DIVIDINDO POR NÚMERO NEGATIVO

Dividiremos por -2 para ver o que acontece com a desigualdade.

$$10 > 8$$
$$\frac{10}{-2} > \frac{8}{-2}$$
$$-5 < -4$$

Novamente o sinal precisou ser invertido para manter a coerência da desigualdade, já que -5 é menor do que -4.

O objetivo era mostrar para você o porquê de sempre termos que inverter o sinal da desigualdade quando nos deparamos com uma multiplicação ou uma divisão por número negativo. Então, se você não gosta de decorar regrinhas, agora já sabe qual é o procedimento para saber quando é hora de inverter o sinal ao realizar a resolução de uma inequação, tanto de uma quanto de duas variáveis. Isso significa que, quando você se deparar com uma inequação, tenha em mente que aquele sinal “diferente” não é um bicho de sete cabeças, beleza?

Dada a inequação $5x - 1 < 7x + 6$, sua solução é:

a) $x \leq 6$

b) $x > -7/2$

c) $x > -1$

d) $x < 7$

e) $x > 6/7$

Alternativa correta: B
Módulo: INEI – Introdução à Inequações
Lista: INEIEX – Exercícios de Fixação #3

Entre as opções a seguir, qual é a que melhor representa a idade de Maria? "Ana tem duas vezes a idade que Maria terá daqui a 10 anos, entretanto, a idade de Ana não supera o quádruplo da idade de Maria".

a) A idade de Ana é maior que a idade de Maria.

b) A idade de Maria é menor que a idade de Ana.

c) A idade de Ana é maior que 10 anos.

d) A idade de Maria é maior que 10 anos.

e) A idade de Maria é menor que 10 anos.

Alternativa correta: B
Módulo: INEI – Introdução à Inequações
Lista: INEIEX – Exercícios de Fixação #6

(PUC-SP) O menor número inteiro k que satisfaz a inequação $8 - 3(2k-1) < 0$.

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

Alternativa correta: E
Módulo: INEI – Introdução à Inequações
Lista: INEIEX – Exercícios de Fixação #8

O maior número natural x que satisfaz a inequação

$5 - 2(x-1) > 3$ é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Alternativa correta: A
Módulo: INEI – Introdução à Inequações
Lista: INEIEX – Exercícios de Fixação #10

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: Ideias e desafios. São Paulo: Saraiva, 1996.

PAIVA, Manoel. Matemática. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2003