RAZÃO
E PROPORÇÃO

mesalva.com

MÓDULOS CONTEMPLADOS

- ✓ PRGR - Proporcionalidade de grandezas
- ✓ RDTA - Regra de três (simples)
- ✓ EIPL - Exercícios de interpretação de problemas
- ✓ PCTG – Porcentagem
- ✓ ESCA – Escala
- ✓ EXRP - Exercícios de Razão e proporção

CURSO	EXTENSIVO 2017
DISCIPLINA	MATEMÁTICA
CAPÍTULO	RAZÃO E PROPORÇÃO
PROFESSORES	ARTHUR LOVATO, TAMARA SALVATORI

RAZÃO E PROPORÇÃO

PROPORCIONALIDADE DE GRANDEZAS

É bastante comum ouvirmos ou falarmos frases do tipo "quanto mais você estudar, melhor vai se sair na prova", "quanto menos você dormir, mais cansado vai ficar", "quanto mais você beber água, mais ficará hidratado", entre inúmeras outras. Perceba que essas frases têm em comum relações entre duas "grandezas": estudo e resultado da prova, sono e cansaço, água e hidratação. Essa relação entre as grandezas pode ser entendida também como de proporcionalidade, podendo ser diretamente ou inversamente proporcional. Como assim? Por exemplo: quanto mais questões você responder, menos tempo vai demorar nas próximas resoluções; quanto mais você caminhar, mais distância irá percorrer. Essas relações são inversa ou diretamente proporcionais? Para responder, vamos analisar o problema parte a parte.

RAZÃO E PROPORÇÃO

Uma razão é a divisão entre dois números e a proporção é uma igualdade entre razões. Parece estranho? Imagine que você lê uma receita em que há: para cada xícara de achocolatado, coloque três de leite (1 está para 3), mas você resolve dobrar essa receita, então precisará duas xícaras de achocolatado e seis de leite. A razão é a relação entre o número de xícaras de achocolatado e o número de xícaras de leite; a proporção é a relação entre uma receita e duas receitas. Veja abaixo:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

A razão de uma receita deve ser lida como "1 está para 3" e a razão da receita dobrada deve ser lida como "2 está para 6". Como temos uma relação de proporção entre essas razões, dizemos "1 está para 3 assim como 2 está para 6".

REGRA DE TRÊS

Agora você está preparando outra receita que sugere que, para cada colher de açúcar, devem ser colocadas 3,5 de farinha. Sem querer, porém, você colocou 3 colheres de açúcar, então precisará consertar o estrago colocando o equivalente de farinha. Como fazer isso? Problemas desse tipo são fáceis de resolver de cabeça, mas às vezes precisamos de algo mais visual, certo? Por isso podemos utilizar a regra de três. Vamos montar um esqueminha em que a quantidade de açúcar de uma receita está na mesma linha que a outra quantidade e que a quantidade de farinha está na mesma linha que a quantidade de farinha que ainda não sabemos qual é. A regra de três propõe uma multiplicação "cruzada". Veja o procedimento abaixo:

1 colher de açúcar — 3,5 colheres de farinha
3 colheres de açúcar — x colheres de farinha

Agora que está tudo bem organizado, vamos fazer a multiplicação cruzada:

1 colher de açúcar — 3,5 colheres de farinha
3 colheres de açúcar — x colheres de farinha

Que resultará em:

$$(1)(x) = (3{,}5)(3)$$
$$x = \frac{10{,}5}{1}$$
$$x = 10{,}5$$

Para que a proporcionalidade seja mantida, é necessário que você adicione 10,5 colheres de farinha à mistura.

A regra de três é muito útil e também muito simples, basta que você tenha atenção na hora de montá-la, certo?

GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Sabemos da importância da atividade física regular na vida das pessoas e o quanto ela pode diminuir o risco de algumas doenças. Apesar disso, muita gente alega não ter tempo para se exercitar. Foi pensando nisso que desenvolvedores apresentaram aplicativos para smartphones que contam os passos dados pelo usuário ao longo dia e avisam se ele precisa dar uma caminhada. Outros aplicativos, como o Bitwalking, disponível em alguns países asiáticos e africanos, tem o foco levemente diferente. Como em países mais pobres as pessoas precisam caminhar muito para se deslocar, esse aplicativo, além de contar os passos dos usuários, paga pela quantidade de passos dados. A empresa desenvolvedora afirma que a intenção é possibilitar uma renda extra a essas pessoas e conta com outras empresas que apoiam a causa da vida saudável como patrocinadoras.

Mas o que tudo isso tem a ver com grandezas diretamente proporcionais? Perceba que todas as informações dadas podem ser resumidas em: quanto mais passos, mais qualidade de vida, ou, ainda, quanto mais passos, mais dinheiro arrecadado. Perceba que a segunda relação pode ser quantificada, ou seja, passos podem ser contados, assim como dinheiro. Vamos supor que, para cada 10000 passos, se ganhe BW$ 1 (1 dólar de bitwalking). Intuitivamente você percebe que quanto mais passos forem dados, mais dinheiro será arrecadado. Então podemos pensar o seguinte: quantos passos são necessários para chegar a ganhar por ano o que a empresa propõe, BW$ 450,00? Você consegue perceber que basta que seja montado um esqueminha de regra de três para resolver esse problema? Veja:

10000 passos → 1 dólar de bitwalking
x passos → 450 dólares de bitwalking

Fazendo a multiplicação cruzada, chegaremos a:

$$(10000)(450) = (1)(x)$$

$$x = \frac{4500000}{1}$$

$$x = 4500000$$

Então, para conseguir ganhar BW$ 450,00 em um ano, uma pessoa precisa dar 4 milhões e meio de passos! Isso significa que quanto mais essa pessoa caminhar, mais dinheiro vai ganhar. Claramente você percebe uma relação de proporcionalidade, certo? Mais precisamente, uma relação direta de proporcionalidade, já que o crescimento de uma grandeza implica no crescimento da outra. Grandezas diretamente proporcionais também envolvem decréscimo, desde que ele também aconteça nas duas.

GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Agora vamos pensar numa outra situação. A entrega de uma das tarefas da gincana da sua escola deve ser feita em até 5 dias e a sugestão é que seja realizada por 4 pessoas. Como sua equipe está atrasada, precisa fazer a tarefa o mais rapidamente possível e pretende colocar 10 pessoas para realizá-la. Perceba que quanto mais pessoas trabalharem na tarefa, menos tempo vai demorar para terminá-la. Diferentemente do que aconteceu no problema da caminhada, temos uma relação de "quanto mais, menos", o que caracteriza uma relação entre grandezas inversamente proporcionais. A resolução é bastante parecida, exceto por um detalhe: é necessário inverter uma parte da regra de três. Veja o procedimento:

4 pessoas — 5 dias
10 pessoas — X dias

A montagem é igual a que estamos acostumados, certo? A parte nova é a da inversão. Você pode escolher qualquer lado para realizá-lo. No caso, fizemos no lado direito:

4 pessoas — 5 dias
10 pessoas — x dias

E agora é só realizar a multiplicação cruzada, como de costume:

4 pessoas — x dias
10 pessoas — 5 dias

Que vai resultar em:

$$
\begin{aligned}
(4)(5) &= (10)(x) \\
10x &= 20 \\
x &= \frac{20}{10} \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Ou seja, se apenas 4 pessoas trabalharem na tarefa, ela será entregue no tempo limite, 5 dias. Mas se 10 pessoas realizarem o trabalho, a tarefa pode ser finalizada em apenas 2 dias! Veja que o número de pessoas aumentou, mas o número de dias diminuiu! Aí está, portanto, uma grandeza inversamente proporcional. Tome cuidado com a interpretação do problema para saber quando ele corresponde a essa situação e quando é a anterior, beleza?

Um caixa expresso de supermercado atende 5 pessoas em 12 minutos. Para atender 15 pessoas que aguardam na fila, o tempo em minutos será:

a) 6

b) 12

c) 24

d) 36

e) 57

Alternativa correta: D
Módulo: RDTA – Regra de três
Lista: RDTA02EX - Exercícios de compreensão #1

Vinte pessoas realizam um projeto de propaganda eleitoral em 10 dias. Para que 5 pessoas realizem o mesmo projeto, serão necessários:

a) 40 dias

b) 20 dias

c) 10 dias

d) 27 dias

e) 37 dias

Alternativa correta: A
Módulo: RDTA – Regra de três
Lista: RDTA06EX - Exercícios de compreensão #1

Numa construtora de casas pré-fabricadas, 8 pessoas constroem uma casa em 12 dias. Caso o empresário resolva colocar apenas 3 pessoas para construir uma casa igual, o tempo necessário será de:

a) 5 dias

b) 15 dias

c) 23 dias

d) 28 dias

e) 32 dias

Alternativa correta: E
Módulo: RDTA – Regra de três
Lista de exercícios: RDTA04EX - Exercícios de compreensão #2

Podemos transportar uma determinada quantidade de pedras em 20 caminhões com capacidade de 7 m^3 cada. Caso utilize caminhões com capacidade para 14 m^3, precisaríamos de:

a) 7 caminhões

b) 10 caminhões

c) 12 caminhões

d) 14 caminhões

e) 45 caminhões

Alternativa correta: B
Módulo: RDTA – Regra de três
Lista de exercícios: RDTA04EX - Exercícios de compreensão #1

ESCALA

Uma amiga sua, fã inveterada do personagem Thor, está fazendo aniversário e você resolve presenteá-la com uma miniatura desse personagem.

MINIATURA DO PERSONAGEM THOR DE OS VINGADORES.

No site em que você está realizando a compra, a única informação sobre as dimensões do produto é “Escala 1:10”. Mas o que isso significa?

Escala é uma outra relação de razão e proporção. É MUITO utilizada em mapas, mas também a encontramos em miniaturas de personagens e carros, por exemplo; serve para que possamos realizar representações de algo muito grande em algo de tamanho acessível, guardando as proporções. A escala é representada por uma razão igualada à outra. A primeira indica que 1 cm na representação (no caso, a miniatura) equivale a 10 cm no real; a segunda é a medida da representação sobre a medida do real. Perceba que dessa forma é possível montar uma regra de três. Veja:

$$\frac{1\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = \frac{\text{medida representação (cm)}}{\text{medida real (cm)}}$$

É possível descobrir a altura do boneco se soubermos a altura do ator (e vice-versa). Graças à nossa maravilhosa internet, com uma rápida busca, você descobriu que a altura do ator desse personagem é 1,90 m. Agora podemos utilizar essa informação para saber o tamanho do boneco. Mas preste atenção: a unidade deve ser centímetros! Assim, a medida real será 190 cm (já que a medida real em metros é 1,90). Vamos substituir esse valor na proporção acima:

$$\frac{1}{10} = \frac{x}{190}$$

Fazendo a multiplicação cruzada (que agora você já sabe fazer muito bem), teremos:

$$\frac{1}{10} = \frac{x}{190}$$

$$10x = 190.1$$

$$x = \frac{190}{10}$$

$$x = 19 \ cm$$

Portanto, o tamanho da miniatura é 19 centímetros. Bem simples, né? Você só precisa estar atento às unidades e tomar cuidado para não confundir o real com o representado, ok? Também é importante perceber que nem sempre a escala será de 1:10, ela pode variar bastante dependendo do objetivo. A escala de um mapa pode ser de 1:50000000, por exemplo.

Uma escala de 1/100 representa:

a) a cada uma unidade do desenho, cem unidades reais

b) a cada 100 unidades reais, uma unidade do desenho

c) 10cm do desenho representa 1 metro real

d) 1 metro do desenho é igual a 1 metro real

e) 1 metro do desenho = 1 quilômetro real

Alternativa correta: A

Módulo: ESCA – Escala

Lista de exercícios: ESCA02EX – Exercícios de compreensão #2

A distância entre dois pontos no mapa é de 50 cm. Sabendo que a distância real é de 10 000 m, a escala utilizada é:

a) 3 : 1.000.000

b) 5 : 20.000

c) 3 : 50

d) 2 : 100.000

e) 1 : 20.000

Alternativa correta: E
Módulo: ESCA – Escala
Lista de exercícios: ESCA04EX – Exercícios de compreensão #2

PORCENTAGEM

Provavelmente você já ouviu falar muito de assuntos relacionados à porcentagem, como 50% das estudantes são mulheres, 20% dos sapatos foram vendidos, 5% dos alunos não compareceu à prova, entre outros exemplos. Mas o que exatamente o símbolo % representa?

O símbolo “por cento” expressa uma divisão por cem, então 50%, 20%, 5% podem ser expressos como:

$$50\% = \frac{50}{100}$$

$$20\% = \frac{20}{100}$$

$$5\% = \frac{5}{100}$$

Isso significa que, entre 100 estudantes, 50 são mulheres; que de 100 sapatos, 20 foram vendidos, e que, de 100 estudantes, 5 não compareceram à prova. Essa é a interpretação de porcentagem, mas como resolver problemas que a envolvem? Novamente utilizando regra de três!

Você leu uma notícia que informa que o número de vagas na universidade em que você deseja estudar, que é de 5000, aumentará em 10%. Você ficou superanimado, afinal de contas, a chance de você conseguir entrar é um pouco maior. Mas quantas vagas serão ofertadas, afinal?

Sempre que trabalharmos com problemas de porcentagem, faremos relações com o 100%, ou seja, um valor completo. No caso do problema, 5000 é 100% do número de vagas, concorda? Então, se 5000 vagas é igual a 100%, quantas vagas correspondem a 10% a mais, ou seja, a 110%? Consegue perceber a relação de proporcionalidade envolvida? Vamos montar a regrinha de três:

$$\begin{array}{lcl} 5000 \text{ vagas} & — & 100\% \\ x \text{ vagas} & — & 100\% + 10\% \end{array}$$

Realizando a multiplicação cruzada:

$$\begin{array}{lcl} 5000 & — & 100 \\ x & — & 110 \end{array}$$

Montando a equação:

$$(5000)(110) = (x)(100)$$

$$100x = 550000$$

$$x = \frac{550000}{100}$$

$$x = 5500$$

Então, havendo um aumento de 10%, o número de vagas será de 5500. Perceba que, quando há um aumento, somamos esse número ao 100%. Agora vamos para outra situação.

Você quer comprar alguns livros que totalizam um valor de R$ 300,00, mas conseguiu um desconto de 20%. Quanto você irá pagar pelos livros? Se antes tínhamos um aumento, agora temos um decréscimo, um desconto. Por isso, no lugar de somar, devemos diminuir o valor do desconto dos 100%. Além disso, perceba que o valor de 100% é o valor “completo” dos livros. Veja:

R$ 300,00	—	100%
R$ x	—	100% − 20%

Realizando a multiplicação cruzada, teremos o seguinte:

300	—	100
x	—	80

Montando a equação:

$$(300)(80) = (x)(100)$$
$$100x = 24000$$
$$x = \frac{24000}{100}$$
$$x = 240$$

Portanto, com o desconto de 20%, você pagará R$ 240,00 pelos livros.

Está bem! Agora vamos ver um outro caso: sua mãe resolveu te dar um aumento na mesada. Você ganhava R$ 400,00 e, a partir do próximo mês, passará a receber R$ 450,00. Quantos por cento sua mesada aumentou?

A resolução desse problema não difere muito do que fizemos até agora, apenas preste atenção no detalhe final, ok? Vamos montar a regra de três:

R$ 400,00	—	100%
R$ 450,00	—	x

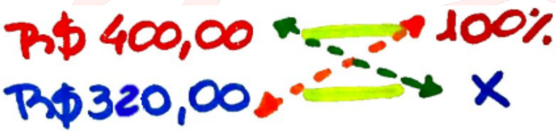
Resolvendo a multiplicação cruzada, teremos:

$$(400)\,(x) \;=\; (450)\,(100)$$
$$400x \;=\; 45000$$
$$x \;=\; \frac{45000}{400}$$
$$x \;=\; 112{,}5$$

Aqui é que precisamos ter calma. Relembre a pergunta “quantos por cento sua mesada aumentou? “. A resposta não é essa que encontramos. Lembre-se: somamos a porcentagem ao 100 quando temos um aumento; diminuímos quando temos um desconto – exatamente o que foi feito nos problemas anteriores. Então, para saber qual foi o aumento é necessário fazer:

$$100 \;+\; x \;=\; 112{,}5$$
$$x \;=\; 112{,}5 \;-\; 100$$
$$x \;=\; 12{,}5\%$$

Portanto, o aumento na sua mesada foi de 12,5%! Beleza? Mas e se você tivesse recebido um corte na mesada em vez do aumento e ela baixasse para R$ 320,00, quantos por cento teria sido essa diminuição? Vamos montar a regrinha:



Resolvendo, chegaremos a:

$$(400)\,(x) \;=\; (320)\,(100)$$
$$400x \;=\; 32000$$
$$x \;=\; \frac{32000}{400}$$
$$x \;=\; 80$$

Atenção! O seu desconto não foi de 80%, não é mesmo? Lembre que precisamos diminuir esse valor do 100%.

$$100 - x = 80$$
$$100 - 80 = x$$
$$x = 20\%$$

Portanto, o corte na sua mesada teria sido de 20%. É bem importante que você lembre de fazer essas adições e ou subtrações finais, tá bom?

Uma casa cujo preço médio é de R$ 150.000,00 foi vendida por um preço 30% acima do preço médio do mercado. Sendo assim, por quando a casa foi vendida?

a) 200000

b) 195000

c) 180000

d) 160000

e) 155000

Alternativa correta: B
Módulo: PCTG – Porcentagem
Lista de exercícios: PCTG02EX – Exercícios de compreensão #2

Uma determinada turma regular de Ensino Médio em uma escola de Porto Alegre possui 26 alunas e 14 alunos. Qual é o percentual de alunas nesta turma?

a) 50%

b) 70%

c) 60%

d) 55%

e) 65%

Alternativa correta: E
Módulo: PCTG – Porcentagem
Lista de exercícios: PCTG04EX – Exercícios de compreensão #2

Uma loja ofereceu uma promoção de queima de estoque, exclusiva para este final de semana! Todos os produtos com 15% de desconto! Ao comprar uma calça cujo preço é R$ 80,00, qual é o valor do desconto oferecido pela loja de acordo com esta promoção?

a) 10

b) 12

c) 14

d) 16

e) 20

Alternativa correta: B
Módulo: PCTG – Porcentagem
Lista de exercícios: PCTG02EX – Exercícios de compreensão #1

Uma calça de preço R entra em liquidação após o natal. Entretanto, apesar da loja oferecer um desconto de 40%, ninguém comprou o produto. Passando o período de promoção, o gerente decidiu aumentar o preço da calça em 40%, desta forma o preço final após um desconto de 40% e um aumento de 40% sofre...

a) um aumento de 10%

b) um desconto de 10%

c) um aumento de 16%

d) um desconto de 16%

e) permanece com o mesmo preço antes de qualquer aumento ou desconto.

Alternativa correta: D
Módulo: PCTG – Porcentagem
Lista de exercícios: PCTG06EX – Exercícios de compreensão #2

REFERÊNCIAS

Bitwalking. Disponível em: <http://www.bitwalking.com/> Acesso em 26.10.2016.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: Ideias e desafios. São Paulo: Saraiva, 1996.