FUNÇÕES III
POLINÔMIOS E MAIS

MÓDULOS CONTEMPLADOS

- TRGF – Revisão de Funções – Translações de Gráficos
- FPLN – Polinômios – Conceitos, Operações, Equivalência
- BRUF – Briot – Ruffini e Teorema do Resto
- RGRD – Recomposição e Raízes
- GINQ – Gráficos e Inequações
- FRCN – Funções Racionais
- FMDL – Função Módulo
- CFDV – Composição de Funções Diversas

CURSO	EXTENSIVO 2017
DISCIPLINA	MATEMÁTICA
CAPÍTULO	FUNÇÕES III - POLINÔMIOS
PROFESSORES	TAMARA SALVATORI E ARTHUR LOVATO

FUNÇÕES III - POLINÔMIOS

FUNÇÕES E TRANSLAÇÕES DE GRÁFICOS

As funções são velhas conhecidas nossas, né? Já trabalhamos com funções de primeiro grau, de segundo grau, exponencial e logarítmica nas apostilas de Funções I e II. Nesta apostila vamos aprofundar nossos conhecimentos sobre as funções, abordando funções de graus maiores do que 2, funções modulares e funções racionais.

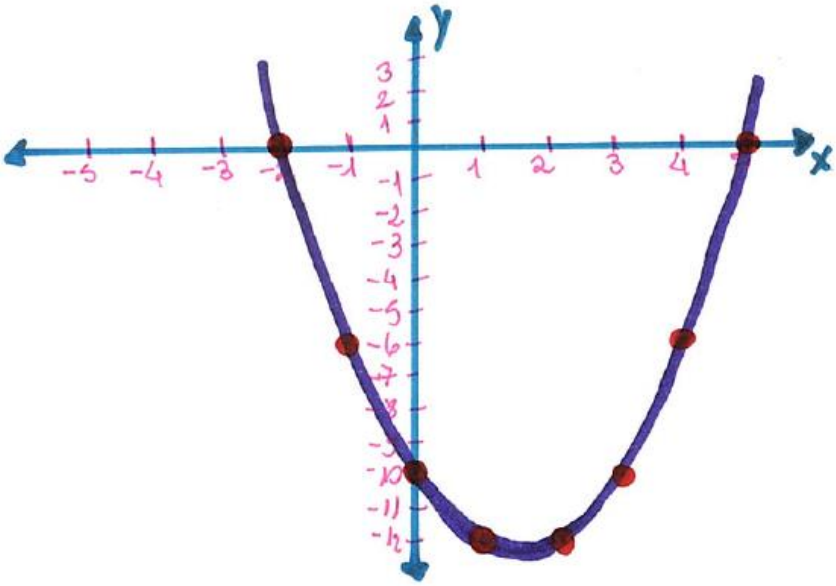
Para iniciar o nosso estudo, vamos relembrar um pouquinho sobre como traçamos gráficos de funções de segundo grau? Vamos dar uma olhada num exemplo da apostila de Álgebra II, uma equação do segundo grau que utilizamos para descobrir o lado da mesa que seu avô havia solicitado que você fizesse, que posteriormente utilizamos como exemplo de uma função de segundo grau na apostila de Funções I:

$$f(x) = x^2 - 3x - 10$$

Para traçarmos esse gráfico dessa função, devemos arbitrar valores para x e, a partir disso, obteremos os valores de y. Veja a tabela que construímos para organizar esses valores:

x	$f(x) = x^2 - 3x - 10$	$f(x) = y$
-2	$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) - 10$	$f(-2) = 0$
-1	$f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) - 10$	$f(-1) = -6$
0	$f(0) = 0^2 - 3(0) - 10$	$f(0) = -10$
1	$f(1) = 1^2 - 3(1) - 10$	$f(1) = -12$
2	$f(2) = 2^2 - 3(2) - 10$	$f(2) = -12$
3	$f(3) = 3^2 - 3(3) - 10$	$f(3) = -10$
4	$f(4) = 4^2 - 3(4) - 10$	$f(4) = -6$
5	$f(5) = 5^2 - 3(5) - 10$	$f(5) = 0$

De posse desses pares ordenados, podemos traçar o gráfico da função:

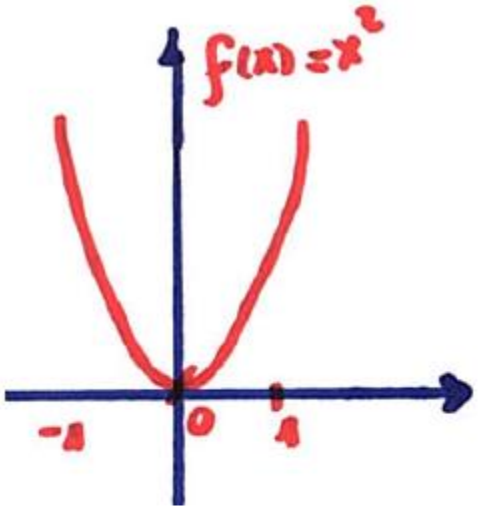


Lembre-se que os locais onde o gráfico toca o eixo x são chamados de raízes da função e o local onde ele corta o eixo y é chamado de termo independente.

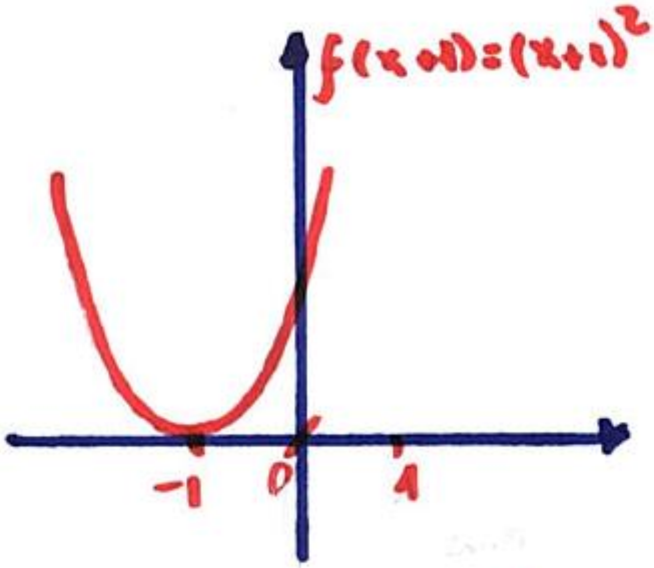
Note também que, nesse caso, temos apenas duas raízes, já que essa é uma função de segunda ordem.

Depois dessa breve revisão, podemos aprofundar nosso conhecimento sobre gráficos abordando suas translações. Esse assunto é bastante útil principalmente quando se conhece a função “original”, pois uma translação ocorre quando uma constante é somada ou subtraída dessa função já conhecida. Por exemplo: se conhecemos a função $f(x) = x^2$, como será o comportamento dos gráficos das funções em que somamos uma constante (positiva e negativa) no argumento da função e quando apenas somamos uma constante na função? Vamos analisar um exemplo utilizando o valor da constante como 1 e -1:

O comportamento da função $f(x) = x^2$ é (em caso de dúvida, faça a tabela e confirme):

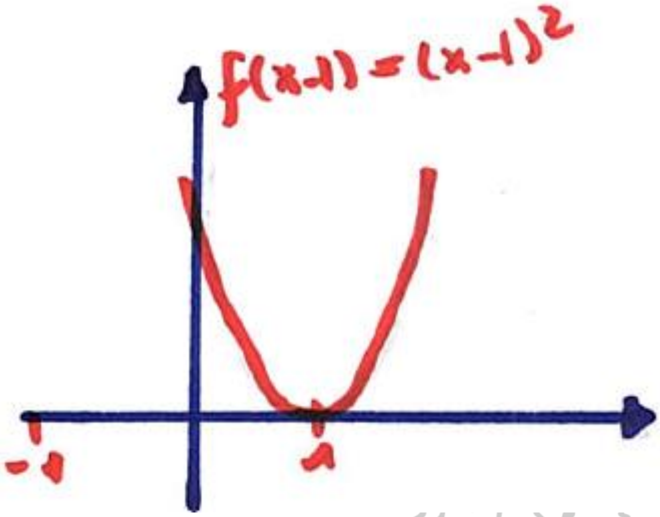


Somando a constante positiva no argumento da função, teremos $f(x+c) = (x+c)^2$, ou seja, $f(x+1) = (x+1)^2$ e o gráfico será:



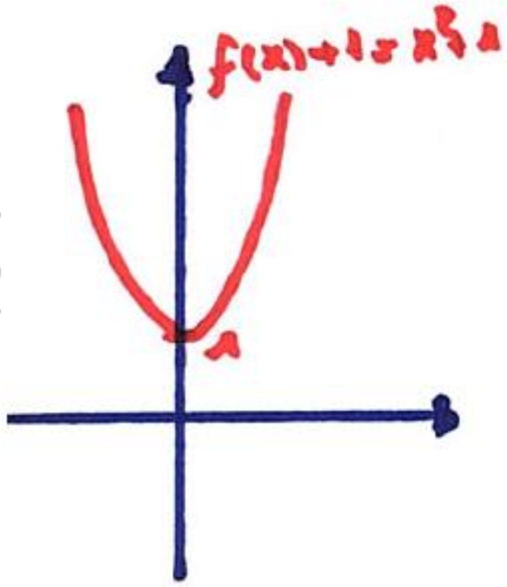
Perceba que ele foi deslocado para a esquerda em uma unidade (isso porque arbitramos que a constante é 1; se fosse 2, ele seria deslocado duas unidades e assim por diante).

Somando a constante negativa no argumento da função, teremos $f(x-c) = (x-c)^2$, ou seja, $f(x-1) = (x-1)^2$ e o gráfico será:



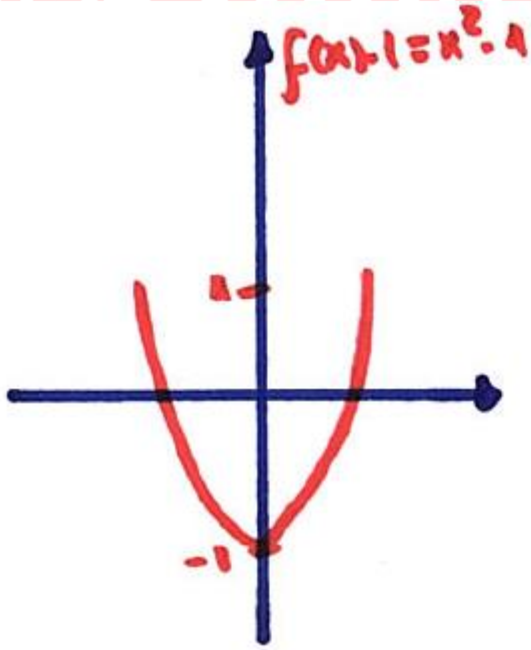
Note que ele foi deslocado para a direita em uma unidade

Mas, se somarmos a constante positiva à função, $f(x)+c = x^2+c$, ou seja, $f(x)+1 = x^2+1$, dá uma olhada no que acontece com o gráfico:

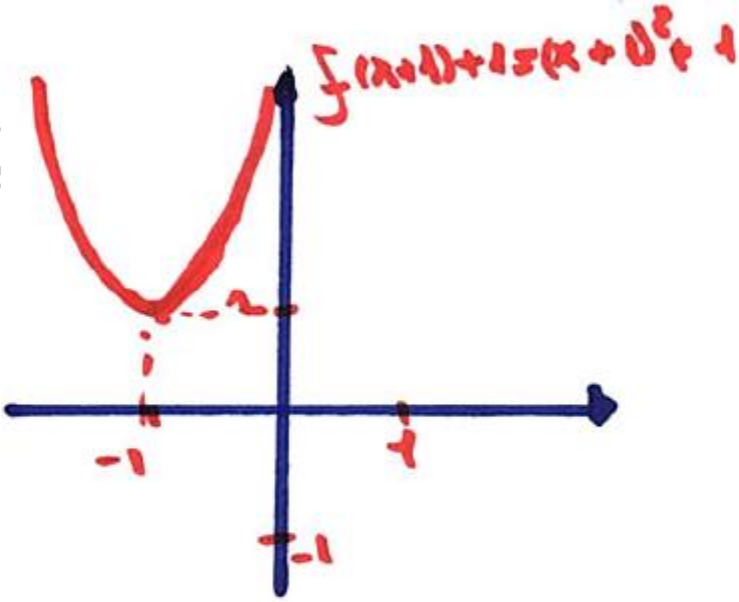


Note que o gráfico sofreu um deslocamento na vertical e foi movido uma unidade para cima.

E se somamos a constante negativa à função, $f(x)-c = x^2-c$, ou seja, $f(x)-1 = x^2-1$, o gráfico será, então, deslocado para baixo:



E, por fim, se somarmos a constante na função e no seu argumento? Haverá deslocamento na vertical e na horizontal! Observe o exemplo com a constante positiva:

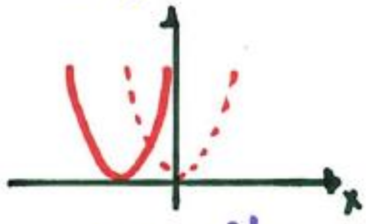


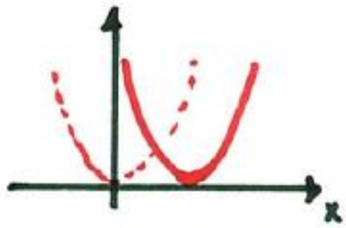
Então, pra não esquecer: quando há soma no argumento da função, há deslocamento horizontal; quando há soma na função, há deslocamento vertical. Confira o esqueminha abaixo:

Deslocamento horizontal: soma constante no arg. da função

c → posit.
esquerda

c → neg.
direita

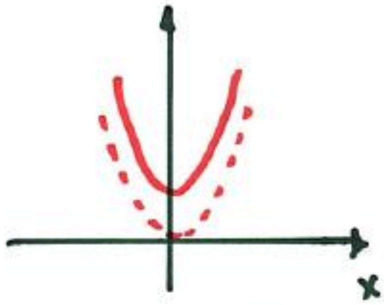


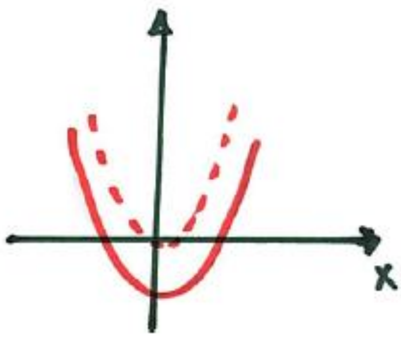


c → posit.
cima

c → neg.
baixo

Deslocamento vertical: soma constante na função





Nada tão complicado, né? Caso você não lembre dessas dicas, basta montar a tabela e traçar o gráfico, ok?

POLINÔMIOS

Você pode até não saber, mas já tem bastante familiaridade com um tipo de polinômio. As equações de primeiro e de segundo graus que estudamos até agora são polinômios de grau um e de grau dois, respectivamente. A grande diferença é que a classe dos polinômios engloba não somente as equações de 1º e 2º graus, mas de graus muito maiores também e é nesse tipo de equação que vamos focar agora. A tabela abaixo diferencia polinômios e não polinômios.

São polinômios	X	Não são polinômios
$x^4 - 2x^3 - x + 7$ ↳ grau 4		$x^7 + x^{1/5} + 10$ ↳ expoente fracionário
$-3x + 1$ ↳ binômio de grau 1		$8x^{-4} - 2x - 17$ ↳ expoente negativo
$28x^8$ ↳ monômio de grau 8		

Um polinômio que possui apenas dois termos também é chamado de binômio; se possui apenas um termo é chamado de monômio. Perceba que equações que possuem expoentes fracionários ou negativos não são polinômios.

Podemos generalizar os polinômios pela equação abaixo:

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

em que $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-2}, a_{m-1}, a_m \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{N}$

Em que:

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

é chamado de polinômio complexo da variável complexa;

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-2}, a_{m-1}, a_m$ são os coeficientes;

$a_m x^m,\ a_{m-1} x^{m-1},\ a_{m-2} x^{m-2},\ a_1 x,\ a_0$ são os termos;

a_0 é o termo independente da variável x.

Vamos identificar esses itens a partir do polinômio $p(x) = x^4 - 2x^3 - x + 7$, que também pode ser escrito dessa forma (mostrando todos os termos):

$$p(x) = 1x^4 - 2x^3 + 0x^2 - 1x + 7$$

$1x^4 - 2x^3 + 0x^2 - 1x + 7$ é o polinômio complexo da variável complexa;

Os coeficientes são os números que acompanham a variável x, portanto: $a_4 = 1;\ a_3 = -2;\ a_2 = 0;\ a_1 = -1;\ a_0 = 7$;

Os termos são cada "pedacinho" do polinômio: $1x^4;\ -2x^3;\ 0x^2;\ -1x;\ 7$

E o termo independente da variável x é 7.

Outra informação que podemos tirar de um polinômio logo de cara, só olhando pra ele, é o seu grau (definido formalmente por gr(p) = n) e o valor do coeficiente dominante. O grau nós estudamos em outro momento que é o valor do maior expoente da variável x. O coeficiente dominante é o valor que acompanha essa variável de maior expoente. Por exemplo:

$$5x^{10} - 2x^4 + 10x^3 + 3x^2 + 1$$

↳ grau 10

↳ coef. dominante = 5

$$-1x^6 + 2x^4 + 10x - 7$$

↳ grau 6

↳ coef. dom. = -1

Lembre-se que o grau do polinômio indica o número de raízes que ele tem, ok? Encontrávamos 2 raízes no caso das equações de segundo grau, já que o grau daquele polinômio é 2. Agora vamos encontrar mais raízes, já que trabalharemos com polinômios de graus maiores.

Caso você se depare com uma situação que solicita o valor numérico do polinômio para x igual a um número alfa ($x = \alpha \to p(\alpha)$), basta substituir esse número no lugar de x do polinômio. Veja um exemplo:

$$p(x) = x^4 + 6x^2 - 7x \quad \text{para } x = 3$$
$$p(3) = 3^4 + 6(3)^2 - 7(3)$$
$$p(3) = 114$$

Então o valor numérico deste polinômio para x = 3 é 114. Caso esse valor fosse zero, significaria que encontramos uma das raízes do polinômio (lembre-se que as raízes também são chamadas de zeros). Veja outro exemplo:

$$p(x) = x^2 - 2x - 3$$

para $x = 3$; $x = 2$; $x = 1$; $x = 0$; $x = 4$.

$$p(4) = 4^2 - 2(4) - 3 = 5$$
$$p(3) = 3^2 - 2(3) - 3 = 0$$
$$p(2) = 2^2 - 2(2) - 3 = -3$$
$$p(1) = 1^2 - 2(1) - 3 = -4$$
$$p(0) = 0^2 - 2(0) - 3 = -3$$

Calculamos os valores numéricos do polinômio para x = 4, x = 3, x = 2, x = 1 e x = 0 e encontramos p(3) = 0, portanto 3 é uma das raízes do polinômio. Se tivéssemos continuado o teste, veríamos que p(-1) = 0 e, assim, também é uma raiz desse polinômio. Claro que existem métodos mais ágeis de encontrar as raízes de um polinômio. Imagine que você está trabalhando com um polinômio de grau 10 e precisa encontrar as raízes. Você ficaria testando números por um bom tempo, certo? E seria bem fácil errar as continhas e se perder de vez, né? Vamos estudar alguns métodos mais eficazes, mas antes precisamos aprender a realizar operações com polinômios.

ADIÇÃO

A adição de polinômios é bastante simples e intuitiva. Basta que você some os coeficientes dos termos semelhantes, isto é, somar os coeficientes dos termos que possuem expoentes iguais. Veja o exemplo:

$$p(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 8$$
$$q(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 9x^2 + x - 1$$

$$p(x) + q(x) = x^6 + (1-2)x^5 + (2+3)x^4 - 7x^3 + (-9-1)x^2 + x + (8-1)$$
$$p(x) + q(x) = x^6 - x^5 + 5x^4 - 7x^3 - 10x^2 + x + 7$$

SUBTRAÇÃO

Na subtração o procedimento é o mesmo, só que você vai subtrair os coeficientes dos termos semelhantes. Só tome cuidado com os sinais! Acompanhe o exemplo abaixo:

$$p(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 8$$

$$q(x) = 2x^6 - 3x^5 + x^4 - 9x^2 + x - 1$$

$$p(x) - q(x) = -2x^6 + (1-(-3))x^5 + (2-1)x^4 - 7x^3 + (-1-(-9))x^2 - x + (8-(-1))$$

$$p(x) - q(x) = -2x^6 + 4x^5 + x^4 - 7x^3 + 8x^2 - x + 9$$

MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação pode ocorrer de duas formas: podemos multiplicar um polinômio por um número ou podemos multiplicar um polinômio por outro polinômio. Vamos analisar cada caso separadamente.

Multiplicação por número: multiplica-se cada um dos coeficientes pelo número em questão. Exemplo:

$$p(x) = 5x^7 - 3x^5 + 4x^2 - 6x - 30 \qquad m = 7$$

$$7 \cdot p(x) = (7.5)x^7 - (7.3)x^5 + (7.4)x^2 - (7.6)x - (7.30)$$

$$7 \cdot p(x) = 35x^7 - 21x^5 + 28x^2 - 42x - 210$$

Multiplicação por polinômio: multiplica-se cada termo de um polinômio por cada termo de outro polinômio, ou seja, aplica-se a nossa tão conhecida distributiva. Exemplo:

$$p(x) = 2x^2 + 3x \qquad q(x) = x^2 - 7x$$

$$p(x) \cdot q(x) = (2x^2 + 3x)(x^2 - 7x)$$

$$p(x) \cdot q(x) = 2x^4 - 14x^3 + 3x^3 - 21x^2$$

$$p(x) \cdot q(x) = 2x^4 - 11x^3 - 21x^2$$

DIVISÃO

A divisão de polinômios exige um pouco mais de dedicação e de atenção do que as outras operações que fizemos. Aprenderemos duas formas de fazê-la: uma que é chamada de método da chave (também conhecida como teorema do resto) e outra que é chamada de dispositivo de Briot-Ruffini. Este último é bastante útil não só na divisão de polinômios, mas para possibilitar o cálculo de raízes de polinômios de ordens maiores do que 2.

MÉTODO DA CHAVE

Quando você estava nas séries iniciais da escola, aprendendo as operações básicas, aprendeu a realizar a divisão de números reais utilizando o método da chave e talvez a utilize até hoje. Nós chegamos a relembrar esse procedimento na apostila de Aritmética I porque ele pode ser rapidamente utilizado em provas ou situações em que você não pode dispor de uma calculadora. O método da chave para polinômios é bastante parecido com o que já conhecemos. Na verdade, a nomenclatura é igual: o polinômio a ser dividido é o dividendo; o que está dividindo é o divisor; o quociente é o valor dessa divisão e o que sobra é o resto. Vamos relembrar isso no próprio diagrama:

dividendo → $p(x)$ $\quad\underline{|\,h(x)}$ → divisor

$\qquad\qquad\qquad\qquad q(x)$ → quociente

resto → $r(x)$

Em que h(x) deve ser diferente de zero e o grau de r(x) deve ser menor do que o grau de p(x) ou igual a zero. Veja que p(x) pode ser reescrito como $p(x) = h(x) . q(x) + r(x)$. Vamos fazer um exemplo utilizando esse método. Vamos dividir o polinômio p(x) pelo polinômio h(x):

$$p(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 7$$
$$h(x) = x^2 - x + 2$$

Vamos montar a divisão utilizando a chave e escrevendo todos os termos dos polinômios (alguns estão ocultos porque valem zero). É essencial que eles estejam em ordem decrescente para evitar possíveis confusões.

$$x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 7 \quad \underline{|\, x^2 - x + 2}$$

Vamos dividir o primeiro termo de p(x) pelo primeiro termo de h(x):

$$\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$$

Esse é o primeiro termo do quociente q(x). Vamos escrevê-lo em seu lugar:

$$\begin{array}{l|l} x^5-4x^4+0x^3+3x^2+0x-7 & x^2-x+2 \\ \cline{2-2} & x^3 \end{array}$$

Vamos multiplicar o quociente q(x) pelo polinômio do divisor h(x) e vamos escrever esse resultado com o sinal trocado embaixo do dividendo p(x):

$$\begin{array}{l|l} x^5-4x^4+0x^3+3x^2+0x-7 & x^2-x+2 \\ \cline{2-2} -x^5+x^4-2x^3 & x^3 \end{array}$$

Fazendo a subtração chegaremos a:

$$\begin{array}{l|l} x^5-4x^4+0x^3+3x^2+0x-7 & x^2-x+2 \\ \cline{2-2} -x^5+x^4-2x^3 & x^3 \\ \cline{1-1} 0-3x^4-2x^3+3x^2+0x-7 & \end{array}$$

Veja que o grau do polinômio do resto r(x) ainda é maior do que o grau do polinômio do divisor h(x), portanto a divisão deve continuar. Vamos repetir os procedimentos anteriores até que o grau de r(x) seja menor do que o de h(x) ou zero. Dividindo o primeiro termo de cada polinômio teremos o seguinte:

$$\frac{-3x^4}{x^2} = -3x^{4-2} = -3x$$

Colocando esse valor no quociente e realizando a multiplicação pelo divisor teremos:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & x^2 - x + 2 \\
\cline{2-2}
-x^5 + 4x^4 + 2x^3 & x^3 - 3x^2 \\
\cline{1-1}
0 \quad -3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & \\
\quad\quad 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 &
\end{array}
$$

Que resulta em:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & x^2 - x + 2 \\
\cline{2-2}
-x^5 + 4x^4 + 2x^3 & x^3 - 3x^2 \\
\cline{1-1}
0 \quad -3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & \\
\quad\quad 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 & \\
\cline{1-1}
\quad\quad 0 \quad -5x^3 + 9x^2 + 0x - 7 &
\end{array}
$$

Novamente o grau de r(x) é maior do que o de h(x), então, continuando a conta, vamos fazer a divisão entre o primeiro termo de cada um deles:

$$\frac{-5x^3}{x^2} = -5x^{3-2} = -5x$$

Colocando esse valor no quociente, multiplicando por h(x) e escrevendo esse resultado no r(x), obteremos:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & x^2 - x + 2 \\
\cline{2-2}
-x^5 + x^4 + 2x^3 & x^3 - 3x^2 - 5x \\
\hline
0 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & \\
\quad 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 & \\
\hline
\quad 0 - 5x^3 + 9x^2 + 0x - 7 & \\
\qquad 5x^3 - 5x^2 + 10x & \\
\hline
\qquad 0 + 4x^2 + 10x - 7 &
\end{array}
$$

Como o grau de r(x) continua maior que o de h(x), continuamos o procedimento. Acompanhe a divisão dos primeiros termos:

$$\frac{4x^2}{x^2} = 4x^{2-2} = 4$$

Aplicando na equação como fizemos anteriormente:

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & x^2 - x + 2 \\
\cline{2-2}
-x^5 + x^4 + 2x^3 \qquad\qquad\qquad\quad & x^3 - 3x^2 - 5x + 4 \\
\cline{1-1}
0 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & \\
3x^4 - 3x^3 + 6x^2 \qquad\quad & \\
\cline{1-1}
0 - 5x^3 + 9x^2 + 0x - 7 & \\
5x^3 - 5x^2 + 10x \quad & \\
\cline{1-1}
0 + 4x^2 + 10x - 7 & \\
-4x^2 + 4x - 8 & \\
\cline{1-1}
0 + 14x - 15 &
\end{array}
$$

Finalmente o grau de r(x) é menor do que o de h(x), portanto a nossa divisão terminou e temos como resultado o seguinte:

$$\underbrace{x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 7}_{p(x)} = \underbrace{(x^2 - x + 2)}_{h(x)} \cdot \underbrace{(x^3 - 3x^2 - 5x + 4)}_{q(x)} + \underbrace{14x - 15}_{r(x)}$$

Perceba que o método da chave não é difícil, ele é apenas trabalhoso. Basta que você preste muita atenção no que está fazendo e treine algumas vezes para lembrar cada um dos passos quando for necessário, ok?

Antes de passarmos para o próximo procedimento, vamos dar uma olhada num caso particular do método da chave.

Um caso particular do método da chave consiste na divisão de um polinômio por outro do tipo x - a. Ou seja, se quiséssemos dividir o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 5$ pelo polinômio h(X) = x - 3. Acompanhe:

Dividindo o primeiro termo do p(x) pelo primeiro termo do h(x):

$$\frac{x^3}{x} = x^2$$

Substituindo na equação de divisão:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 - 3x - 5 & x - 3 \\ \cline{2-2} -x^3 + 3x^2 & x^2 \\ \cline{1-1} 0 + x^2 - 3x - 5 & \end{array}$$

Como o resto tem grau maior que o divisor, vamos continuar a divisão fazendo:

$$\frac{x^2}{x} = x^{2-1} = x$$

Substituindo e resolvendo, chegaremos a

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 - 3x - 5 & x - 3 \\ \cline{2-2} -x^3 + 3x^2 & x^2 - x \\ \cline{1-1} 0 + x^2 - 3x - 5 & \\ -x^2 + 3x & \\ \cline{1-1} 0 + 0 - 5 & \end{array}$$

Note que obtivemos como resto o número 5. Vamos guardar essa informação e analisar outro caso. A raiz do divisor dessa divisão é 3, consegue perceber? Isso porque basta isolarmos o x para sabermos a raiz de uma equação de primeiro grau. Portanto:

$$x-3 \rightarrow x-3=0$$
$$x=3$$
é
raiz

Vamos encontrar o valor numérico do polinômio p(x) para x = 3:

$$x=3$$
$$p(x)=x^3-2x^2-3x-5$$
$$p(3)=3^3-2(3)^2-3(3)-5$$
$$p(3)=27-18-9-5$$
$$p(3)=-5$$

Veja que o resto obtido na divisão por x - 3 é igual ao valor numérico do polinômio p(x) quando substituímos x por 3, que é a raiz do divisor. Podemos escrever isso da seguinte forma: r = p(3).

Generalizando, podemos dizer que o resto r da divisão de um polinômio p(x) por um binômio do tipo x - a, com a pertencendo aos Complexos, é igual a p(a), ou seja, r = p(a).

A partir disso, caímos no chamado Teorema de D'Alembert, que é uma consequência do Método da Chave, que diz que um polinômio p(x) só é divisível por x - a se a é raiz de p(x), ou seja, p(a) = 0.

BRIOT-RUFFINI

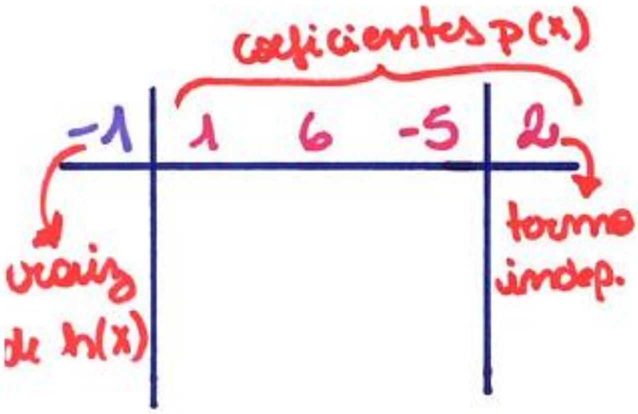
O dispositivo de Briot-Ruffini é bastante interessante quando se deseja dividir um polinômio por um binômio do tipo x - a. Vamos fazer um exemplo para entender como ele funciona. Queremos dividir o polinômio p(x) pelo binômio h(x):

$$p(x) = x^3 + 6x^2 - 5x + 2$$
$$h(x) = x + 1$$

Antes de iniciarmos, é necessário saber qual é a raiz do binômio h(x). Acompanhe abaixo:

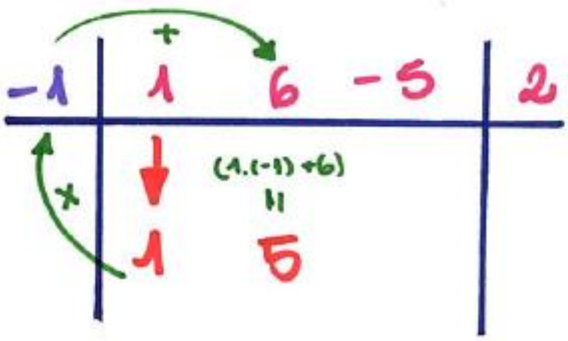
$$x + 1 \longrightarrow x + 1 = 0$$
$$x = -1 \rightarrow \text{raiz}$$

Beleza! Agora vamos separar essa raiz e os coeficientes do polinômio p(x) nessa ordem: 1 (a raiz), 1, 6, -5, 2 (os coeficientes). Vamos escrever esses números em um diagrama que algumas pessoas chamam de chiqueirinho.

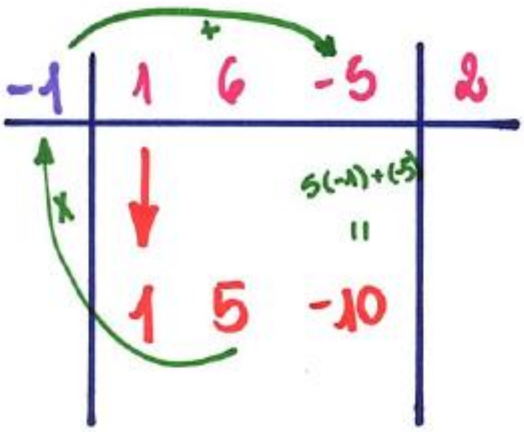


Perceba que a raiz e o termo independente ficaram separados. Isso TEM que acontecer, ok? Não é meramente uma questão estética, o diagrama deve ser construído assim.

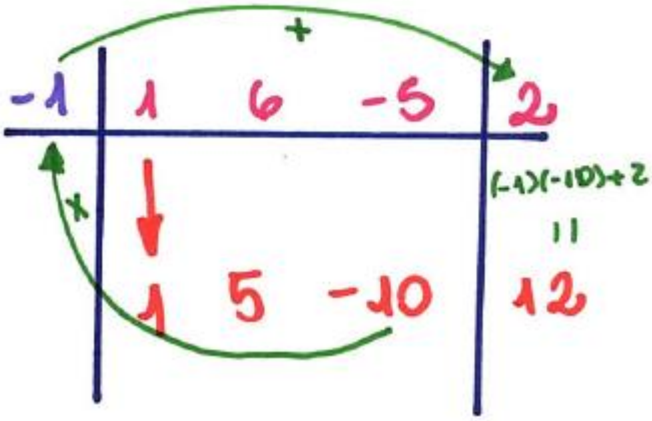
Vamos copiar o primeiro coeficiente uma linha abaixo, multiplicá-lo pela raiz, somá-lo com o valor do coeficiente à direita e vamos escrever o número obtido embaixo desse coeficiente. Isso fica mais simples olhando o diagrama. Acompanhe:



Vamos fazer o mesmo procedimento com o valor que obtivemos: multiplicamos pela raiz e somamos com o coeficiente à direita do estudado:



Novamente realizaremos o mesmo procedimento e obteremos o seguinte:



O procedimento está pronto! Precisamos apenas interpretá-lo. O que está no meio das hastes verticais é o quociente q(x) e o que está à direita da segunda haste vertical é o resto r(x) dessa divisão. Veja abaixo:

$$1 \quad 5 \quad -10 \rightarrow q(x) = x^2 + 5x - 10$$

$$12 \rightarrow r(x) = 12$$

Perceba que o procedimento de Briot-Ruffini, a cada aplicação, diminuirá um grau do polinômio. No nosso caso, tínhamos um polinômio de ordem 3 e obtivemos um polinômio de ordem 2.

DECOMPOSIÇÃO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Em primeiro lugar, é importante que você tenha claro que toda equação polinomial com grau 1 ou maior que 1 tem pelo menos uma raiz complexa. Esse preceito é chamado de Teorema Fundamental da Álgebra (você não precisa guardar esse nome, apenas a informação). Atrelado a esse teorema, temos outro, chamado de Teorema da Decomposição, que diz que todo polinômio de grau 1 ou maior que 1 pode ser decomposto utilizando suas raízes. Veja a forma geral dessa decomposição:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\text{Decomposição} \Rightarrow p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ são raízes de $p(x) = 0$

Perceba que apenas o coeficiente dominante é utilizado na decomposição, juntamente com as raízes. Para deixar tudo mais claro, vamos ver um exemplo da forma decomposta do polinômio p(x) que tem como raízes -2, 3, 7:

$$p(x) = 2x^3 - 16x^2 + 2x + 84 \Rightarrow \text{raízes}: -2, 3, 7$$

$$\text{Decomp.}: p(x) = \underbrace{2}_{\text{coef. dominante}}[(x-(-2))](x-3)(x-7) \Rightarrow p(x) = 2(x+2)(x-3)(x-7)$$

Então, quando você se deparar com a forma decomposta de um polinômio, já sabe que é muito mais fácil de identificar suas raízes, né?

Continuando nesse raciocínio... Quando você resolvia equações de segundo grau e o discriminante resultava em zero, você já sabia que a equação possuía duas raízes reais iguais, né? Mudando um pouquinho as palavras, podemos dizer que a multiplicidade da raiz é 2. Ou seja, a multiplicidade de uma raiz indica quantas vezes aquela raiz se repete. Assim, no caso do nosso exemplo, como temos as raízes -2, 3, 7, todas elas têm multiplicidade 1, que indica que não são repetidas, ou seja, são raízes simples. Saber a multiplicidade das raízes é bastante importante na hora de traçar um gráfico. Veja outro exemplo de como podemos "descobrir" a multiplicidade de uma raiz:

$$p(x) = x^2 - 6x + 9 \xrightarrow{\text{decomp.}} p(x) = (x-3)(x-3) \rightarrow \text{2 raízes iguais}$$

$$p(x) = (x-3)^2 \quad \text{↳ multiplicidade 2}$$

Pela decomposição vemos que esse polinômio tem duas raízes iguais, que chamamos de raiz com multiplicidade 2 ou raiz dupla. Podemos agrupá-las colocando o expoente 2 no termo correspondente. Vamos analisar mais um exemplo:

$$p(x) = x^4 - 11x^3 + 42x^2 - 68x + 40 \longrightarrow p(x) = (x-2)(x-2)(x-2)(x-5)$$

$$p(x) = \underbrace{(x-2)^3}_{\text{multiplicidade 3}} \underbrace{(x-5)}_{\text{raiz simples}}$$

Uma das raízes tem multiplicidade 3 e a outra tem multiplicidade simples, ou seja, não se repete. Note que, como o polinômio tem grau 4, ele tem 4 raízes, apesar de uma delas se repetir 3 vezes.

Ainda nessa *vibe* de raízes e coeficientes, vamos abordar um tema que você já conhece para as equações de segundo grau: Soma e Produto. Agora chamaremos de Relações de Girard e ampliaremos a ideia dessas relações para polinômios de graus maiores.

RELAÇÕES DE GIRARD

As relações de Girard são baseadas em associar as raízes de um polinômio com seus coeficientes. Ou seja, a partir dos coeficientes de um polinômio você consegue encontrar as raízes dele. Vamos estudar essas relações para polinômios de grau 2, 3 e n, ou seja, para qualquer grau.

PARA POLINÔMIOS DE GRAU 2:

Vamos considerar um polinômio genérico em que a (com a diferente de zero), b e c são os coeficientes e r1 e r2 são as raízes. Lembre que, como é um polinômio de grau 2, teremos apenas duas raízes. Veja como ficam as relações entre os coeficientes e as raízes:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \rightarrow \text{Soma}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow \text{Produto}$$

= Relações de Girard p/ eq. grau 2

Que, como já havia sido dito, são as equações de Soma e Produto que já vimos na apostila de Álgebra II.

PARA POLINÔMIOS DE GRAU 3

Agora considere o polinômio de grau 3 a seguir, em que a, b, c e d são os coeficientes e r1, r2, r3 são as raízes:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1 x_2 x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{array}\right\} \text{Relações de Girard grau 3}$$

Note que agora temos uma equação a mais. Isso porque temos uma raiz a mais, ok?

PARA POLINÔMIOS DE GRAU N:

Vamos assumir que o polinômio de grau n é um polinômio de grau maior ou igual a 1 (nesse caso, você pode entender que o grau n é maior do que 3, porque as relações anteriores são mais simples de lembrar) e que tem como coeficientes an, an-1, an-2, ..., a1, a0 e raízes r1, r2, r3, ..., rn-1, rn.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Não faremos a dedução aqui, mas, utilizando o raciocínio dos casos anteriores, teremos o seguinte:

- A soma das n raízes é:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_3 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

- A soma dos produtos das raízes tomadas
  - duas a duas

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \dots + x_{m-1}x_m = \frac{a_{m-2}}{a_m}$$

  - três a três

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + \dots + x_{m-2}x_{m-1}x_m = -\frac{a_{m-3}}{a_m}$$

  - quatro a quatro

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_3x_6 + \dots + x_{m-3}x_{m-2}x_{m-1}x_m = \frac{a_{m-4}}{a_m}$$

  - p a p

$$x_1x_2\dots x_p + x_1x_2\dots x_{p-1}x_{p+1} + x_1x_2\dots x_{p-2}x_{p-1} + \dots + x_{m-(p-1)}x_{m-(p-2)}x_{m-(p-3)}\dots x_m = \frac{(-1)^p \cdot a_{m-p}}{a_m}$$

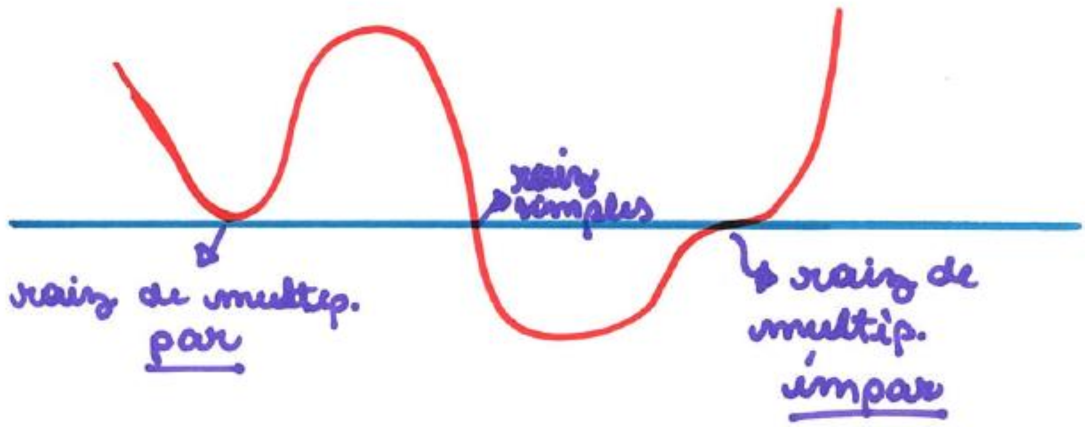
- O produto das n raízes é:

$$x_1x_2x_3\dots x_{m-1}x_m = \frac{(-1)^m \cdot a_0}{a_m}$$

Com essas equações você é capaz de resolver inúmeros problemas, mas analise a viabilidade na utilização delas para não perder muito tempo nas questões, ok?

ANÁLISE GRÁFICA

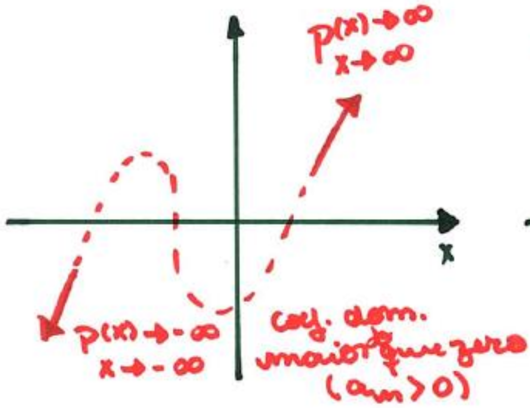
Agora que já sabemos como calcular as raízes e as multiplicidades, podemos entender como interpretar e/ou traçar os gráficos dos polinômios de graus maiores do que 2 (porque os de grau 2 você já deve estar cansado de fazer, né?). Para iniciarmos nosso estudo é imprescindível que você lembre que a raiz é o local em que o gráfico corta ou encosta no eixo x. Vamos analisar o esboço abaixo:

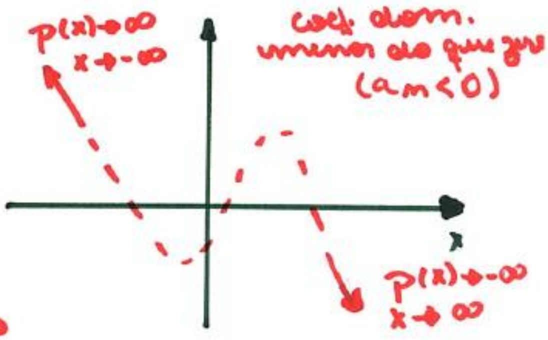


Note que o gráfico tangencia o eixo x quando a multiplicidade da raiz é par; já quando a multiplicidade é ímpar, o gráfico faz uma espécie de degrau no eixo x; quando a raiz é simples, como você está acostumado, o gráfico corta o eixo x.

Para compreender o comportamento do gráfico no infinito é necessário avaliar dois fatores: o sinal do coeficiente dominante e se o grau do polinômio é par ou ímpar. Vamos ver o esboço desses gráficos para entender melhor:

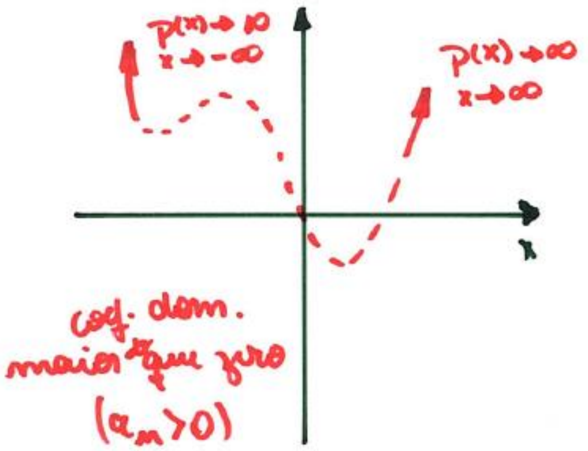
SE O GRAU FOR ÍMPAR

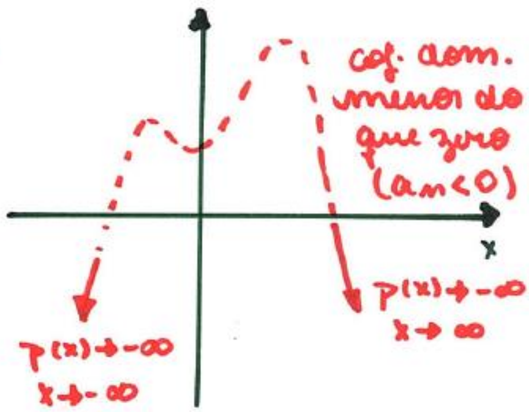




Perceba que, na primeira situação, quando o coeficiente dominante é maior do que zero, os valores do polinômio tendem ao menos infinito quando o x tende ao menos infinito; e os valores do polinômio tendem ao mais infinito quando o x tende ao mais infinito. Já na segunda situação, quando o coeficiente dominante é menor do que zero, os valores do polinômio tendem ao mais infinito quando o x tende ao menos infinito; os valores do polinômio tendem ao menos infinito quando o x tende ao mais infinito.

SE O GRAU FOR PAR





Na primeira situação, quando o coeficiente dominante é maior do que zero, os valores do polinômio tendem a mais infinito tanto com x tendendo a menos infinito quanto com x tendendo a mais infinito. Já na segunda situação, quando o coeficiente dominante é menor do que zero, os valores do polinômio tendem a menos infinito, tanto para x tendendo a menos infinito quanto tendendo para mais infinito.

Com essas informações sobre as raízes e coeficientes fica bem mais fácil interpretar ou esboçar o gráfico de qualquer função polinomial.

GRÁFICOS DE INEQUAÇÕES

Nós já estudamos algumas inequações polinomiais e como esboçar seus intervalos a partir de gráficos. Agora vamos aprender como resolver essas inequações quando temos mais de duas raízes. Para isso, vamos fazer um exemplo utilizando polinômio p(x) abaixo, considerando que as raízes dele são 3, -1 e -4:

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 11 - 12$$

E vamos investigá-lo para valores menores ou iguais a zero:

$$x^3 + 2x^2 - 11x - 12 \leq 0$$

Como já sabemos quais são as raízes do polinômio, vamos apenas colocá-las em ordem crescente e formar intervalos com elas:

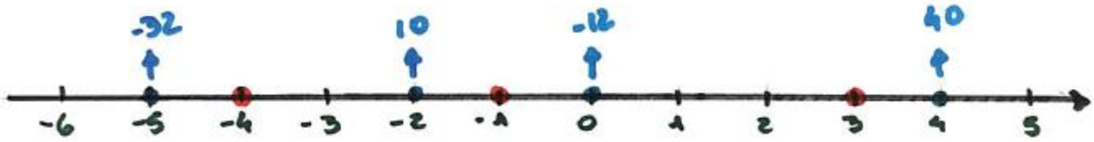
Ordem crescente: $-4, -1, 3$

Intervalos: $(-\infty, -4); (-4, -1); (-1, 3); (3, +\infty)$

Como os polinômios mudam de sinal apenas em suas raízes, vamos testar o sinal da função em cada um desses intervalos que fizemos, escolhendo um valor entre cada um deles. Por exemplo: entre menos infinito e -4 podemos testar o sinal de -5; entre -4 e -1 podemos testar sinal de -2; entre -1 e 3, o sinal de 0; e, por fim, entre 3 e mais infinito, o sinal de 4. Perceba que esses valores foram arbitrados, você poderia escolher quaisquer outros desde que os valores estejam entre os intervalos das raízes. Escolhidos os valores dos quais queremos saber o sinal, basta substituir no polinômio. Fazer uma tabelinha ajuda bastante. Veja:

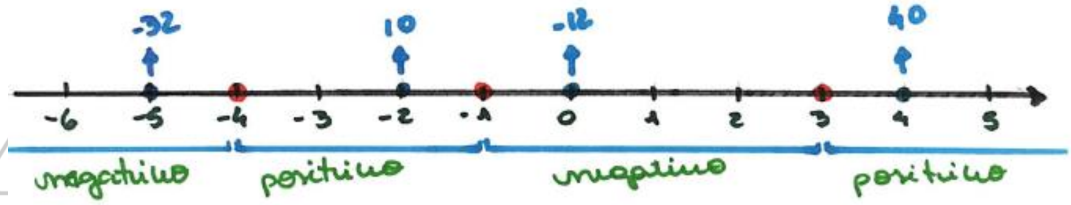
Intervalo	x	$p(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$
$(-\infty, -4)$	-5	$(-5)^3 + 2(-5)^2 - 11(-5) - 12 = -32$
$(-4, -1)$	-2	$(-2)^3 + 2(-2)^2 - 11(-2) - 12 = 10$
$(-1, 3)$	0	$0^3 + 2(0)^2 - 11(0) - 12 = -12$
$(3, +\infty)$	4	$4^3 + 2(4)^2 - 11(2) - 12 = 40$

Vamos traçar uma reta com valores de x. Vamos marcar um pontinho vermelho em cima das raízes e um pontinho preto em cima dos valores que arbitramos para saber o sinal. Vamos, ainda, só para entender melhor, colocar o valor que encontramos quando substituímos esses x no polinômio. Acompanhe:



Lembre-se de duas coisas: i) a função muda de sinal nas raízes; ii) estamos procurando valores para os quais o polinômio é menor ou igual a zero. Analisando o gráfico, você percebe que até o -4 (que é onde o sinal muda) o polinômio é negativo, já que analisamos x = -5 e vimos que ele é negativo (-32). Entre -4 e -1o polinômio é positivo, já que x = -2 é +10, positivo, afinal. Entre 1 e 3 o polinômio é negativo, como vimos, x = 0 é -12, então temos um intervalo negativo. A partir de 3 o polinômio é positivo, já que x = 4 é +40. Veja esses intervalos no gráfico:

Então, expressando o resultado em intervalos, e lembrando que procurávamos valores para os quais o polinômio era negativo, teremos que:



$$p(x) \leq \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ ou } -1 \leq x \leq 3\}$$

É trabalhoso, mas não podemos chamar de difícil, né? Veja o resuminho:

1. Você precisa determinar as raízes da equação associada. Se o problema fornecê-las, pule esta etapa;
2. Crie intervalos com as raízes. Lembre-se de incluir o menos infinito e o mais infinito;
3. Escolha um ponto em cada intervalo e substitua no polinômio para determinar o sinal;
4. Trace o gráfico e analise o que obteve;
5. Expresse o resultado em forma de intervalos.

FUNÇÕES RACIONAIS

Quando uma função é expressa por uma razão de polinômios, temos uma função racional. Formalmente, a função racional é o seguinte:

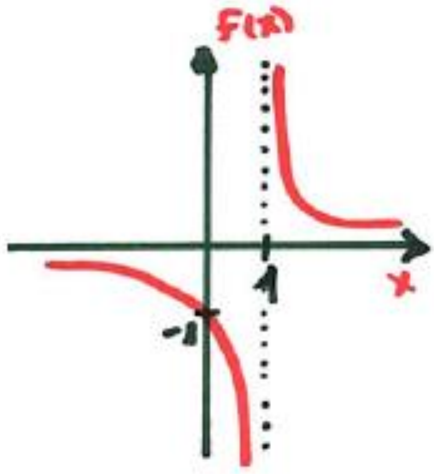
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Em que P(x) e Q(x) são polinômios e Q(x) é diferente de zero.

Para resolver equações racionais basta que você faça manipulações algébricas como igualar o numerador ao denominador e passe tudo para o mesmo lado da igualdade, assim você terá apenas um polinômio, como os que estudamos até agora. A parte mais interessante é quando analisamos graficamente as funções racionais. Elas têm algumas particularidades:

O gráfico de uma função racional não é necessariamente contínuo, como estamos bastante acostumados. Funções desse tipo podem apresentar interrupções em seus gráficos, que são os pontos em que o denominador é zero; assim, a função não existe naquele ponto. Veja um exemplo da função racional abaixo.

$f(x) = \frac{1}{x-1}$ tem como gráfico:

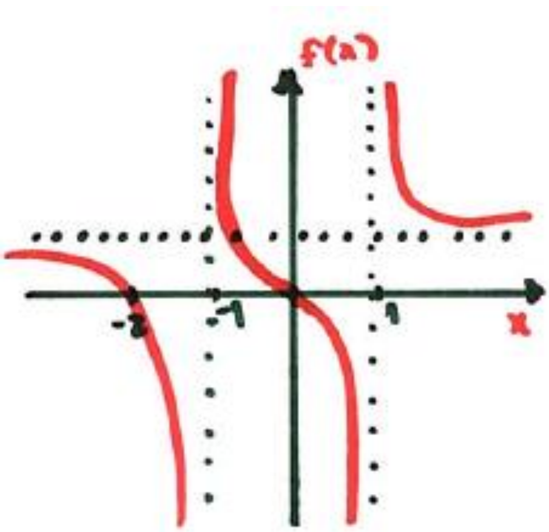


A linha tracejada na vertical é chamada de assíntota vertical.

A função racional pode também não estar definida para alguns valores de x. Por causa disso, quando a função chega próxima a esses valores, o gráfico acaba se aproximando da assíntota vertical. Veja o exemplo:

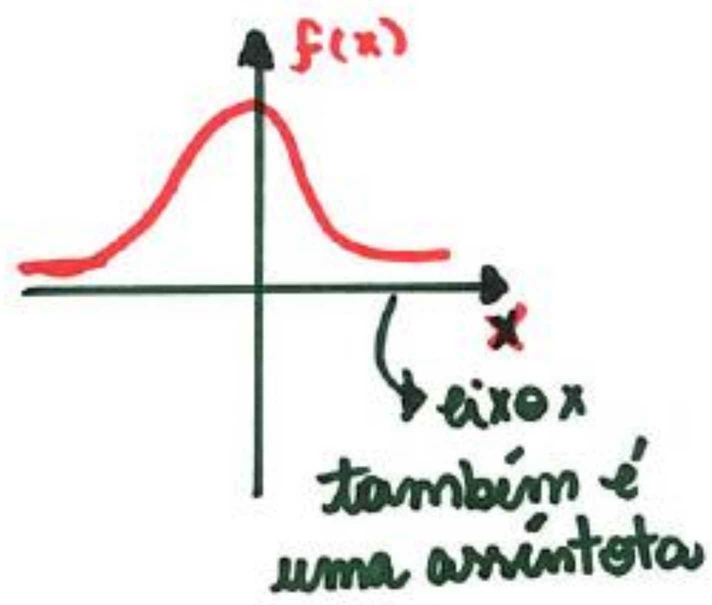
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$$

tem como gráfico:



A função racional pode também começar ou terminar muito perto da assíntota horizontal. Veja o exemplo abaixo (analise o exemplo anterior também):

$$f(x) = \frac{7}{x^2 + 2}$$



As funções racionais também podem estar associadas a inequações racionais. Para resolver esse tipo de função basta que você analise o polinômio do denominador separado do polinômio do numerador, como duas inequações separadas. Vamos fazer um exemplo. Observe a inequação abaixo:

$$\frac{x+5}{x-2} \geq 0$$

Podemos reescrevê-la como uma função racional:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+5}{x-2}$$

Note que x deve ser diferente de 2, porque, caso seja igual, o denominador será zero e a inequação seria inconsistente.

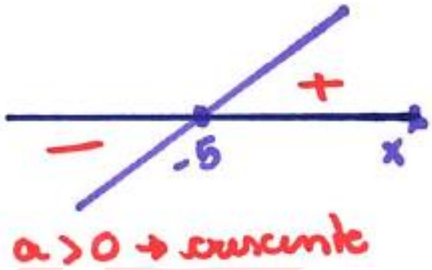
Vamos analisar P(x) e Q(x) separadamente, como se fossem duas funções separadas, começando por P(x).

$$f_1(x) = x + 5$$

Encontrando a raiz dessa função:

$$x + 5 = 0$$
$$x = -5$$

Como o coeficiente dominante é maior do que zero, a função é crescente e seu gráfico será:



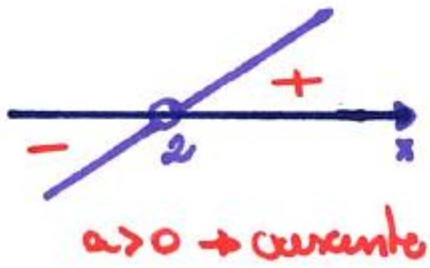
Vamos fazer o mesmo procedimento com o Q(x):

$$f_2(x) = x - 2$$

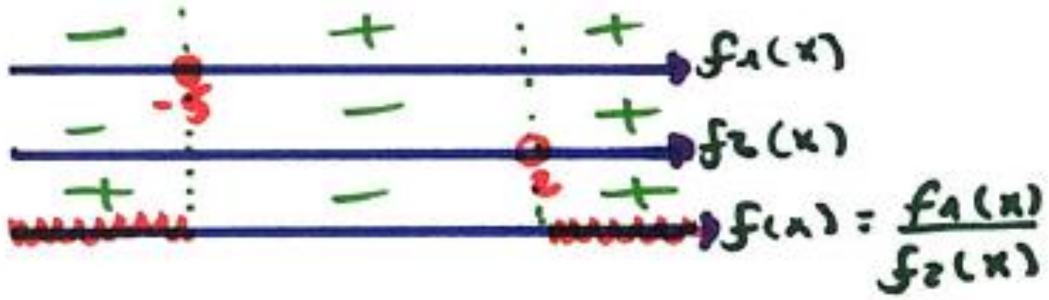
Encontrando as raízes da função:

$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

Novamente o coeficiente dominante é maior do que zero, assim a função será crescente e o gráfico será como o indicado abaixo. Mas fique atento! Lembre-se que o x deve ser diferente de 2 para que o denominador não zere; assim, é importante indicar isso no gráfico com um intervalo aberto.



Por fim, vamos juntar esses dois gráficos, ou seja, faremos a intersecção entre eles. Acompanhe:



Portanto, o local em que a função é maior ou igual a zero é de menos infinito a -5 (incluindo -5) ou acima de 2. Formalmente é o seguinte:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5 \text{ ou } x > 2\}$$

FUNÇÃO MÓDULO

Antes de abordarmos a função módulo, vamos entender o que é o módulo de um número real. Quando falamos que estamos preocupados com o módulo de um número queremos dizer que estamos interessados no valor absoluto, sem o sinal. O módulo é indicado por duas barrinhas verticais que envolvem algum número. Veja os exemplos:

$$|8| = 8$$
$$|-4| = 4$$
$$|0| = 0$$
$$|\sqrt{17}| = \sqrt{17}$$
$$|0,89| = 0,89$$
$$\left|\frac{-7}{3}\right| = \frac{7}{3}$$
$$|-54| = 54$$

Note que o módulo de um número positivo é apenas ele mesmo; já o módulo de um número negativo é o seu oposto.

Qual é o valor da equação abaixo |x| = 5? Perceba que x pode ser igual a 5 ou igual a -5, já que o módulo de -5 é 5, certo? Veja abaixo:

$$|x| = 5 \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

Mas se estivéssemos interessados em saber |x| = 0 teríamos apenas uma resposta, x = 0, já que não temos -0 ou +0, ok?

Qual é a solução de |x| = -10? Nesse caso, não temos solução, já que o módulo é sempre maior ou igual a zero, nunca negativo, como foi apresentado.

Agora que já deixamos claro o que é o módulo de um número e como é uma equação (bem simples) envolvendo o módulo, podemos abordar a função módulo (ou função modular). Ela é caracterizada da seguinte forma: f(x) = |x|. Podemos afirmar, a partir do que acabamos de estudar, que:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Perceba que temos duas sentenças nessa função. Para esboçar o gráfico precisamos analisá-las separadamente. Vamos iniciar a análise arbitrando valores maiores ou iguais a zero para x:

$$x \geq 0 \rightarrow f(x) = x$$

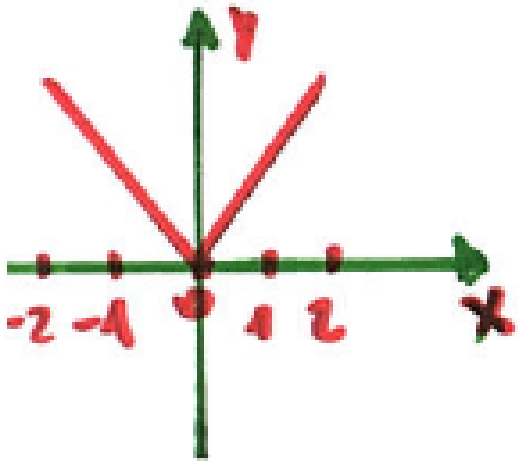
x	$f(x)$
0	0
1	1
2	2

Arbitramos valores menores do que zero para x:

$$x < 0 \rightarrow f(x) = -x$$

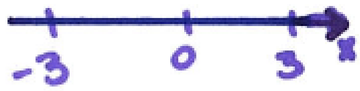
x	$f(x)$
-2	$-(-2) = 2$
-1	$-(-1) = 1$

Traçando o gráfico, teremos o seguinte:

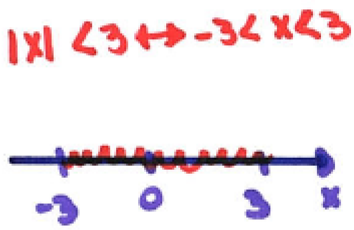


Note que o gráfico não cruza o eixo x, ficando apenas na parte positiva de y.

Vamos analisar como fica a situação das inequações modulares (por exemplo, $|3x-12| < 2$). Primeiramente, vamos entender algumas propriedades dos módulos de números reais. Veja a reta abaixo em que marcamos os pontos -3, 0 (origem) e 3:



Quando x é maior que -3 e menor que 3, a distância entre um ponto de x até a origem é menor do que 3. Assim, para qualquer um desses x, teremos que $-3 < x < 3$, que pode ser escrito como $|x| < 3$, ok? Veja a indicação no gráfico:



Mas se o x é menor do que -3 e maior do que 3, a distância entre um ponto de x até a origem é maior do que 3. Então, para qualquer um desses x, teremos que x < -3 ou x > 3, que pode ser escrito como |x| > 3. Veja no gráfico:

$$|x| > 3 \leftrightarrow x < -3 \text{ ou } x > 3$$

Assim, podemos concluir que quando temos uma inequação em que k > 0:

$$|x| < k \leftrightarrow -k < x < k$$

$$|x| \leq k \leftrightarrow -k \leq x \leq k$$

$$|x| > k \leftrightarrow x < -k \text{ ou } x > k$$

$$|x| \geq k \leftrightarrow x \leq -k \text{ ou } x \geq k$$

Vamos fazer um exemplinho para entender melhor determinando o conjunto solução de |x+7| > 12.

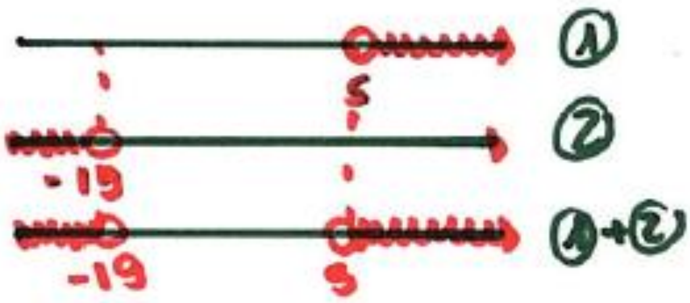
Precisamos utilizar uma das propriedades que acabamos de estudar, em que:

$$|x| > k \leftrightarrow x < -k \text{ ou } x > k$$

Então, teremos o seguinte:

$$|x+7| > 12 \longleftrightarrow \begin{cases} x+7 > 12 \rightarrow x > 12-7 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x > 5 \quad (1) \\ x+7 < -12 \rightarrow x+7 < -12 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x < -12-7 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x < -19 \quad (2) \end{cases}$$

Expressando cada uma das inequações graficamente e fazendo a união delas, teremos:



Portanto, a solução dessa inequação é:

$$S = \{x \in \Re \mid x < -19 \text{ ou } x > 5\}$$

Foram muitas informações nessa apostila, né? Revise tudo com carinho e entenda cada detalhe. No final das contas, você vai perceber que tudo está interligado. Bons estudos!

REFERÊNCIAS

Cálculo Digital. Disponível em <http://www.calculo.iq.unesp.br/Calculo1/funcao-graficos-racional.html>. Acesso em 25 de jul de 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2003.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática:** Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.